- EXISTUJE I NÁSLEDUJÍCÍ REKURZIVNÍ VÝPOČET DETERMINANTU
- **VĚTA 6.1** (**LAPLACEŮV ROZVOJ** PODLE i-TÉHO ŘÁDKU): → LZE ROZVÍJET I PODLE SLOUPCE

PRO $n \geq 2$, $A \in T^{n \times n}$ A $i = 1, \dots, n$ PLATÍ:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{i,j} \cdot \det(A^{i,j})$$

→ MATICE VZNIKLÁ Z A VYŠKRTNUTÍM i-TÉHO ŘÁDKU A j-TÉHO SLOUPCE

- DK:

1) $A_{i*} = e_j^T$: ← i-TÝ ŘÁDEK A JE JEDNOTKOVÝM VEKTOREM

- PROHAZOVÁNÍM ŘÁDKŮ A SLOUPCŮ ZÍSKÁME $A' := \left(\begin{array}{c|c} A^{i,j} & \\ \hline 0 \cdots 0 & 1 \end{array}\right)$
- VÍME, ŽE $\det(A) = (-1)^{(n-i)+(n-j)} \det(A')$, $\det(A) = (-1)^{i+j} \det(A')$
- TEDY $\det(A) = (-1)^{i+j} \det(A') = (-1)^{i+j} \sum_{p \in S_n} sgn(p) \prod_{i=1}^{n} A'_{i,p(i)} =$

PRO p S $p(n) \neq n$ JE $A'_{n,p(n)} = 0$ →

$$= (-1)^{i+j} \underbrace{\sum_{\substack{p \in S_n \\ p(n) = n}} sgn(p) \prod_{i=1}^{n} A'_{i,p(i)}}_{= \det(A^{i,j}), \text{ PROTOŽE } A'_{n,n} = 1} = (-1)^{i+j} \det(A^{i,j})$$

2) OBECNÉ A_{i*}:

Z **VĚTY 5.1** A Z ČÁSTI 1) JE

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} \vdots & & \\ A_{i,1} & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & \end{pmatrix} + \dots + \det\begin{pmatrix} & & \vdots \\ 0 \cdots & 0 & A_{i,n} \\ & & \vdots \end{pmatrix} =$$

$$= A_{i,1} (-1)^{i+1} \det(A^{i,1}) + \dots + A_{i,n} (-1)^{i+n} \det(A^{i,n})$$

$\boxtimes$

- ANALOGICKY SE DÁ DĚLAT LAPLACEŮV ROZVOJ PODLE j-TÉHO SLOUPCE
- PŘÍKLAD: ROZVOJ PODLE 1. SLOUPCE

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -9 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -9 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+1} \left(1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot (-2) + (-9)(-1)^{2+1} \cdot 3 \right) = \underline{\underline{25}}$$

ROZVOJ PODLE 1. ŘÁDKU

- POMOCÍ DETERMINANTU LZE ODVODIT TAKÉ EXPLICITNÍ VZOREC PRO ŘEŠENÍ SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC S REGULÁRNÍ MATICÍ

- **VĚTA 6.2** (**CRAMEROVO PRAVIDLO**):
  JE-LI $A \in T^{m \times m}$ REGULÁRNÍ A $b \in T^m$, PAK ŘEŠENÍ SOUSTAVY $Ax = b$ JE DÁNO VZORCEM $$x_i = \frac{\det\big(\underbrace{A + (b - A_{*i})e_i^T}_{\text{MATICE ZÍSKANÁ Z A NAHRAZENÍM } i\text{-TÉHO SLOUPCE VEKTOREM } b}\big)}{\det(A)}, \quad i = 1, \dots, m.$$

- DK:
  - A JE REGULÁRNÍ ⇒ ŘEŠENÍ x SOUSTAVY $Ax = b$ JE JEDNOZNAČNÉ
  - VEKTOR b JE LINEÁRNÍ KOMBINACÍ SLOUPCŮ MATICE A, NEBOLI $b = \sum_{j=1}^{m} A_{*j} x_j$
  - PAK MÁME PRO $i = 1, \dots, m$:

JINÝ ZÁPIS MATICE

i-TÝ SLOUPEC

$$\det(A + (b - A_{*i})e_i^T) = \det\begin{pmatrix} A_{*1} & \cdots & b & \cdots & A_{*m} \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} A_{*1} & \cdots & \sum_{j=1}^{m} A_{*j} x_j & \cdots & A_{*m} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{m} x_j \det\begin{pmatrix} A_{*1} & \cdots & A_{*j} & \cdots & A_{*m} \end{pmatrix} =$$

SLOUPCOVÁ LINEARITA (T). **VĚTA 5.1** PRO SLOUPCE)

PRO $j \neq i$ MÁME V MATICI 2 STEJNÉ SLOUPCE A ČLEN JE PAK NULOVÝ PODLE **DŮSLEDKU 5.2**

$$= x_i \det(A)$$

- PO VYDĚLENÍ OBOU STRAN ROVNOSTI ČÍSLEM $\det(A) \neq 0$ MÁME
$$x_i = \frac{\det(A + (b - A_{*i})e_i^T)}{\det(A)} \quad \text{PRO } i = 1, \dots, m$$
⊠

- DNES SE PRO VÝPOČTY NEPOUŽÍVÁ. MÁ ALE ZAJÍMAVÉ TEORETICKÉ DŮSLEDKY:
  - EXPLICITNÍ VZOREC
  - SPOJITOST ZOBRAZENÍ $(A, b) \mapsto A^{-1}b$ NA DEFINIČNÍM OBORU REGULÁRNÍCH MATIC
  - ODHAD VELIKOSTI POPISU ŘEŠENÍ Z VELIKOSTI POPISU VSTUPNÍCH HODNOT

- ADJUNGOVANÁ MATICE:

- NÁSLEDUJÍCÍ MATICE SE NÁM BUDE HODIT A MÁ I POUŽITÍ V KRYPTOGRAFII
- JE-LI $A \in T^{n\times n}$ PRO $n \geq 2$, PAK **ADJUNGOVANÁ MATICE** $adj(A) \in T^{n\times n}$ MÁ SLOŽKY $adj(A)_{i,j} = (-1)^{i+j} det(A^{ji})$, $i,j = 1,\dots,n$

↳ = MATICE A BEZ j-TÉHO ŘÁDKU A i-TÉHO SLOUPCE (OBRÁCENĚ NEŽ U LAPLACEOVA ROZVOJE)

- **VĚTA 6.3** (O ADJUNGOVANÉ MATICI):
  PRO $A \in T^{n\times n}$ PLATÍ $A\cdot adj(A) = det(A)\cdot I_n$

DK:
- JDE PŘÍMO ODVODIT PO SLOŽKÁCH $i,j = 1,\dots,n$:

$$(A\cdot adj(A))_{i,j} \underset{\text{MATICOVÉ NÁSOBENÍ}}{=} \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}\cdot adj(A)_{k,j} \underset{\text{DEFINICE } adj(A)}{=} \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}(-1)^{k+j} det(A^{jk}) = \begin{cases} det(A) & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$$

PRO $i=j$ SE JEDNÁ O LAPLACEŮV ROZVOJ $det(A)$ PODLE j-TÉHO ŘÁDKU A. PRO $i\neq j$ JE TO ROZVOJ PODLE j-TÉHO ŘÁDKU MATICE VZNIKLÉ Z A NAHRAZENÍM i-TÉHO ŘÁDKU j-TÝM. TAKOVÁ MATICE MÁ ALE 2 STEJNÉ ŘÁDKY A JEJÍ DETERMINANT JE 0 PODLE **DŮSLEDKU 5.2** ☒

⇒ MÁME EXPLICITNÍ VZOREC PRO A^{-1}:

JE-LI $A \in T^{n\times n}$ REGULÁRNÍ, PAK $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A)$

- STAČÍ VYDĚLIT ČÍSLEM $det(A) \neq 0$

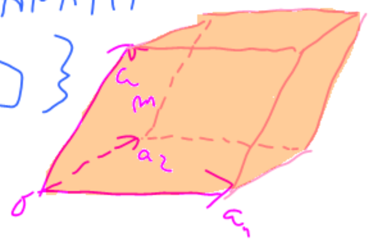
⇒ DÁ SE UKÁZAT, ŽE PRO $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ JE $A^{-1} \in \mathbb{Z}^{n\times n} \iff det(A) = \pm 1$

- PŘÍKLAD:

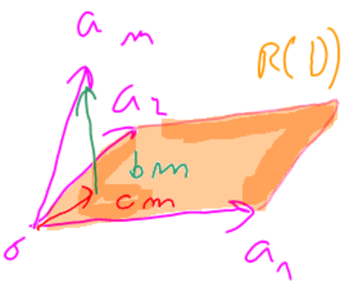
PRO $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ JE $adj(A) = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -4 \\ -3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ A TEDY

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{\underbrace{det(A)}_{=2}} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 5 & -4 \\ -3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- **GEOMETRICKÝ VÝZNAM DETERMINANTU:**
  - PŘI ZOBRAZENÍ $x \mapsto Ax$ S $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ MĚNÍ GEOMETRICKÁ TĚLESA SVŮJ OBJEM S KOEFICIENTEM $|\det(A)|$
- **ROVNOBĚŽNOSTĚN** S LINEÁRNĚ NEZÁVISLÝMI HRANAMI $a_1, \dots, a_m$ JE $\{x \in \mathbb{R}^m : x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i, \ \alpha_i \in [0,1]\}$



- **VĚTA 6.4** (OBJEM ROVNOBĚŽNOSTĚNU): OBJEM ROVNOBĚŽNOSTĚNU R S HRANAMI URČENÝMI ŘÁDKY MATICE $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ JE $\sqrt{\det(AA^T)}$.
  ↳ PRO $m = n$ JE TO $|\det(A)|$
  - ZNAMÉNKO DETERMINANTU URČUJE „ORIENTACI" MNOHOSTĚNU
- DK:
  - INDUKCÍ PODLE m. PRO $m = 1$ ZŘEJMÉ ($\sqrt{\det(AA^T)} = \|A\|$)
  - INDUKČNÍ KROK:
    - NECHŤ $m \geq 2$ A OZNAČME $a_i^T := A_{i*}$, $D := \begin{pmatrix} - a_1^T - \\ \vdots \\ - a_{m-1}^T - \end{pmatrix}$
      ↳ = A BEZ m-TÉHO ŘÁDKU
    - ROZLOŽME $a_m = b_m + c_m$, KDE $c_m \in R(D)$ A $b_m \in R(D)^\perp$ (DŮSLEDEK VĚTY 3.2)



⇒ ŘÁDKY $R(D)$ GENERUJÍ ROVNOBĚŽNOSTĚN MENŠÍ DIMENZE V PROSTORU $R(D)$ („PODSTAVA")
    - Z IP JE OBJEM PODSTAVY $\sqrt{\det(DD^T)}$
    - b_m JE KOLMÝ NA PODSTAVU A $\|b_m\|$ JE TAK „VÝŠKA" R
    - OZNAČME $A' := \begin{pmatrix} - a_1^T - \\ \vdots \\ - a_{m-1}^T - \\ - b_m^T - \end{pmatrix}$
    - DO A' LZE K A PŘEJÍT POMOCÍ ELEMENTÁRNÍCH ŘÁDKOVÝCH ÚPRAV NEMĚNÍCÍCH DETERMINANT (K POSLEDNÍMU ŘÁDKU STAČÍ PŘIČÍST c_m, COŽ JE LINEÁRNÍ KOMBINACE $a_1, \dots, a_{m-1}$)

⇒ $A = E_1 \cdots E_k A'$, KDE $\det(E_1) = \dots = \det(E_k) = 1$

$\Rightarrow \det(AA^T) = \det(E_1 \cdots E_k A' A'^T E_k^T \cdots E_1^T) =$

$A = E_1 \cdots E_k A'$

VĚTA 5.5

$= \det(E_1) \cdots \det(E_k) \det(A'A'^T) \det(E_k^T) \cdots \det(E_1^T) =$

$\det(E_1) = \cdots = \det(E_k) = 1$

$= \underline{\underline{\det(A'A'^T)}}$

– DÁL STAČÍ VYPOČÍTAT $\det(A'A'^T)$:

$$A'A'^T = \begin{pmatrix} D \\ b_m^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D^T & b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} DD^T & Db_m \\ b_m^T D^T & b_m^T b_m \end{pmatrix} =$$

VOLBA A'

$b_m \perp a_1, \dots, a_{m-1}$

$$= \begin{pmatrix} DD^T & 0 \\ 0 & b_m^T b_m \end{pmatrix}$$

DETERMINANT BLOKOVÉ MATICE

– NENÍ TĚŽKÉ UKÁZAT $\det(A'A'^T) = (b_m^T b_m) \det(DD^T)$ A PROTO $\sqrt{\det(A'A'^T)} = \|b_m\| \cdot \sqrt{\det(DD^T)}$, COŽ UŽ DÁVÁ OBJEM R (VÝŠKA × OBJEM PODSTAVY)

$\boxtimes$