DETERMINANTY

(1)

- JISTÁ CHARAKTERISTIKA ČTVERCOVÝCH MATIC S ŘADOU APLIKACÍ (NAPŘÍKLAD PRO ŘEŠENÍ SOUSTAVY ROVNIC)

- **DETERMINANT** MATICE $A \in T^{m \times m}$ JE ČÍSLO

$$\det(A) := \underbrace{\sum_{p \in S_m}}_{\text{SČÍTÁME PŘES PERMUTACE NA MNOŽINĚ } \{1,\dots,m\}} \underbrace{\operatorname{sgn}(p)}_{\text{ZNAMÉNKO PERMUTACE } ((-1)^{m-k}\text{, KDE } k \text{ JE POČET CYKLŮ V PERMUTACI } p)} \underbrace{\prod_{i=1}^{m} A_{i,p(i)}}_{\text{NÁSOBÍME MEZI SEBOU } m \text{ PRVKŮ Z } A\text{, KDE Z KAŽDÉHO ŘÁDKU I SLOUPCE VYBEREME PRÁVĚ JEDEN}}$$

- PŘÍKLADY:

a) $$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \underbrace{a_{11}a_{22}}_{\text{ČLEN PRO } p = id} - \underbrace{a_{12}a_{21}}_{\text{ČLEN PRO } p = (1\ 2)}$$

b) $$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \underbrace{a_{11}a_{22}a_{33}}_{p = id} + \underbrace{a_{21}a_{32}a_{13}}_{p = (1\ 3\ 2)} + \underbrace{a_{31}a_{12}a_{23}}_{p = (1\ 2\ 3)} \underbrace{- a_{13}a_{22}a_{31}}_{p = (1\ 3)} \underbrace{- a_{23}a_{32}a_{11}}_{p = (2\ 3)} \underbrace{- a_{33}a_{12}a_{21}}_{p = (1\ 2)}$$

- VÝPOČET $\det(A)$ PODLE DEFINICE JE ZNAČNĚ NEEFEKTIVNÍ
  ↳ $m!$ ČLENŮ

- PRO HORNÍ TROJÚHELNÍKOVOU MATICI A ($A_{ij} = 0$ PRO $i > j$) JE TO ALE SNADNÉ, PLATÍ TOTIŽ VYNÁSOBIT PRVKY NA DIAGONÁLE (NEBOLI $\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{mm}$)

  - KAŽDÝ ČLEN $a_{1,p(1)} \cdots a_{m,p(m)}$ Z DEFINICE $\det(A)$ JE TOTIŽ NENULOVÝ POUZE, POKUD $p(i) = i$ PRO KAŽDÉ $i = 1,\dots,m$
    ↓
    DÁ SE NAHLÉDNOUT INDUKCÍ PRO $i = m,\dots,1$

$\Rightarrow$ POKUD BY ELEMENTÁRNÍ ŘÁDKOVÉ ÚPRAVY PŘÍLIŠ NEMĚNILY DETERMINANT, PAK BY $\det(A)$ ŠEL ZÍSKAT Z $\det(REF(A))$ → $REF(A)$ JE HORNÍ TROJÚHELNÍKOVÁ

- K TOMU NEJDŘÍV MUSÍME NAHLÉDNOUT JEDNU VLASTNOST DETERMINANTU

- **VĚTA 5.1** (ŘÁDKOVÁ LINEARITA DETERMINANTU):

PRO $A \in T^{m \times m}$, $b \in T^m$ A $i = 1, \dots, m$ PLATÍ

$$\det\underbrace{\begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,m} \\ A_{i,1}+b_1 & \cdots & A_{i,m}+b_m \\ A_{m,1} & \cdots & A_{m,m}\end{pmatrix}}_{=A + e_i b^T} = \det\underbrace{\begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,m} \\ A_{i,1} & \cdots & A_{i,m} \\ A_{m,1} & \cdots & A_{m,m}\end{pmatrix}}_{=A} + \det\underbrace{\begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,m} \\ b_1 & \cdots & b_m \\ A_{m,1} & \cdots & A_{m,m}\end{pmatrix}}_{A + e_i (b^T - A_{i*})}$$

- DK:

$$\det(A + e_i b^T) = \sum_{p \in S_m} \operatorname{sgn}(p) A_{1,p(1)} \cdots (A_{i,p(i)} + b_{p(i)}) \cdots A_{m,p(m)} =$$

$$= \sum_{p \in S_m} \operatorname{sgn}(p) A_{1,p(1)} \cdots A_{m,p(m)} + \sum_{p \in S_m} \operatorname{sgn}(p) A_{1,p(1)} \cdots b_{p(i)} \cdots A_{m,p(m)} =$$

$$= \underline{\det(A) + \det(A + e_i(b^T - A_{i*}))}$$

$\boxtimes$

- **DETERMINANT A ZÁKLADNÍ ŘÁDKOVÉ ÚPRAVY**:

- NECHŤ SE MATICE $A \in T^{m \times m}$ ZMĚNÍ ELEMENTÁRNÍ ŘÁDKOVOU ÚPRAVOU NA A'

1) VYNÁSOBENÍ i-TÉHO ŘÁDKU ČÍSLEM $\alpha \in T$ $\Rightarrow \det(A') = \alpha \cdot \det(A)$

I PRO $\alpha = 0$

- DK:

$$\det(A') = \sum_{p \in S_m} \operatorname{sgn}(p) A'_{1,p(1)} \cdots A'_{m,p(m)} =$$

$A'_{i,p(i)} = \alpha A_{i,p(i)}$

A $A'_{j,p(j)} = A_{j,p(j)}$ JINAK

$$= \sum_{p \in S_m} \operatorname{sgn}(p) A_{1,p(1)} \cdots (\alpha A_{i,p(i)}) \cdots A_{m,p(m)} =$$

$$= \underline{\alpha \cdot \det(A)}$$

$\boxtimes$

PRO $i \neq j$

2) VÝMĚNA i-TÉHO A j-TÉHO ŘÁDKU $\Rightarrow \det(A') = -\det(A)$

- DK:

- BUĎ $t = (i, j)$ TRANSPOZICE. PAK PLATÍ:

$$\det(A') = \sum_{p \in S_m} \operatorname{sgn}(p) A'_{1,p(1)} \cdots A'_{i,p(i)} \cdots A'_{j,p(j)} \cdots A'_{m,p(m)} =$$

$$= \sum_{p \in S_m} \operatorname{sgn}(p) \prod_{k=1}^{m} A_{k,p \circ t(k)} = -\sum_{p \circ t \in S_m} \operatorname{sgn}(p \circ t) \prod_{k=1}^{m} A_{k,p \circ t(k)} =$$

$$A'_{k,p(k)} = \begin{cases} A_{k,p(k)} = A_{k,p \circ t(k)} & \text{PRO } k \neq i,j \\ A_{j,p(i)} = A_{j,p \circ t(j)} & \text{PRO } k = i \\ A_{i,p(j)} = A_{i,p \circ t(i)} & \text{PRO } k = j \end{cases}$$

$-\operatorname{sgn}(p) = \operatorname{sgn}(p \circ t)$

SČÍTÁME PŘES VŠECHNY PERMUTACE Z S_m

$$= \underline{-\det(A)}$$

$\boxtimes$

- **DŮSLEDEK 5.2**: MÁ-LI MATICE $A \in T^{m \times m}$ DVA STEJNÉ ŘÁDKY, PAK $\det(A)=0$.
  - DK (PRO CHARAKTERISTIKU TĚLESA $\neq 2$): DŮSLEDEK ALE PLATÍ PRO OBECNÁ TĚLESA
    - VÝMĚNOU STEJNÝCH ŘÁDKŮ MÁME $\det(A) = -\det(A)$.
    - TEDY $\det(A)=0$. $\boxtimes$

3) PŘIČTENÍ α-NÁSOBKU j-TÉHO ŘÁDKU K i-TÉMU $\Rightarrow \det(A') = \det(A)$
- DK:

  $i \neq j$

  - MÁME

$$\det(A') = \det\begin{pmatrix} A_{1*} \\ \vdots \\ A_{i*} + \alpha A_{j*} \\ \vdots \\ A_{m} \end{pmatrix} \underset{\text{VĚTA 5.1}}{=} \det(A) + \det\begin{pmatrix} A_{1*} \\ \vdots \\ \alpha A_{j*} \\ \vdots \\ A_{m*} \end{pmatrix} \underset{\text{DŮSLEDEK 5.2}}{=} \det(A) + 0 = \underline{\underline{\det(A)}}$$

i-TÝ ŘÁDEK $\boxtimes$

$\Rightarrow \det(\alpha A) = \alpha^m \det(A)$, MÁ-LI A NULOVÝ ŘÁDEK/SLOUPEC, PAK $\det(A)=0$

- NYNÍ LZE $\det(A)$ SPOČÍTAT POMOCÍ $REF(A)$
- **ALGORITMUS** (VÝPOČET DETERMINANTU POMOCÍ REF):
  - VSTUP: $A \in T^{m \times m}$
  - VÝSTUP: $\det(A)$
  - PŘEVEĎ A NA $A' := REF(A)$, BUĎ c := ZMĚNY DETERMINANTU PŘI PŘEVODU
  - PAK $\det(A) = \underline{\underline{c^{-1} \cdot (A'_{11} \cdots A'_{mm})}}$

- NYNÍ DETERMINANT $\det(A)$ UMÍME SPOČÍTAT. K ČEMU NÁM ALE JE?
- UKÁŽEME SI, ŽE ZACHYCUJE JISTÉ CHARAKTERISTIKY A, NAPŘ. REGULARITU
- **VĚTA 5.3** (KRITERIUM REGULARITY): MATICE $A \in T^{m \times m}$ JE REGULÁRNÍ $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.
- DK: ELEMENTÁRNÍ ŘÁDKOVÉ ÚPRAVY A NA $A' := REF(A)$ NEMĚNÍ NENULOVOST DETERMINANTU. TEDY A JE REGULÁRNÍ $\Leftrightarrow$ A' NEMÁ NULU NA DIAGONÁLE $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$. $\boxtimes$

- NAHLÉDNEME DALŠÍ PĚKNÉ VLASTNOSTI
- TRANSPOZICE NEMĚNÍ HODNOTU DETERMINANTU
- **TVRZENÍ 5.4** (DETERMINANT TRANSPOZICE):
  PRO KAŽDÉ $A \in T^{n \times n}$ JE $\det(A) = \det(A^T)$

$p(i) = j \Leftrightarrow i = p^{-1}(j)$ A $\operatorname{sgn}(p) = \operatorname{sgn}(p^{-1})$

- DK:
  - $\det(A^T) = \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) \prod_{i=1}^{n} A^T_{i,p(i)} \overset{A_{i,j} = A^T_{j,i}}{=} \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) \prod_{i=1}^{n} A_{p(i),i} =$

$$= \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p^{-1}) \prod_{j=1}^{n} A_{j,p^{-1}(j)} = \sum_{p^{-1} \in S_n} \operatorname{sgn}(p^{-1}) \prod_{j=1}^{n} A_{j,p^{-1}(j)} = \det(A)$$

p URČUJE p^{-1} A OBRÁCENĚ

SČÍTÁME PŘES VŠECHNY PERMUTACE NA $\{1, \dots, n\}$ ☒

- DETERMINANTY SE CHOVAJÍ DOBŘE I VŮČI NÁSOBENÍ MATIC
- **VĚTA 5.5** (MULTIPLIKATIVNOST DETERMINANTU)
  PRO KAŽDÉ $A, B \in T^{n \times n}$ PLATÍ $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

DETERMINANT SOUČINU = SOUČIN DETERMINANTŮ

- DK:
  a) ROVNOST PLATÍ, JE-LI A MATICÍ ELEMENTÁRNÍ ŘÁDKOVÉ ÚPRAVY:

1) $A = E_i(\alpha)$: $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \alpha & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ (VYNÁSOBENÍ i-TÉHO ŘÁDKU ČÍSLEM α)

POTOM $\det(AB) = \alpha \det(B)$ A $\det(A)\det(B) = \alpha \det(B)$ ✓

UŽ VÍME

$\det(A) = \alpha$

2) $A = E_{i,j}$: $\begin{array}{c} \\ i \\ j \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (VÝMĚNA i-TÉHO A j-TÉHO ŘÁDKU)

POTOM $\det(AB) = -\det(B)$ A $\det(A)\det(B) = -\det(B)$ ✓

UŽ VÍME

$\det(A) = -1$

3) $A = E_{i,j}(\alpha)$: $\begin{array}{c} \\ i \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ \alpha & & 1 \end{pmatrix}$ (PŘIČTENÍ α-NÁSOBKU j-TÉHO ŘÁDKU K i-TÉMU)

POTOM $\det(AB) = \det(B)$ A $\det(A)\det(B) = \det(B)$ ✓

UŽ VÍME

$\det(A) = 1$

VĚTA 5.3

b) PRO OBECNÉ A:
- JE-LI A SINGULÁRNÍ, PAK AB JE SINGULÁRNÍ A $\det(AB) = 0 = \det(A)\det(B)$
- JE-LI A REGULÁRNÍ PAK $A = E_1 \cdots E_k$ (E_i = MATICE EL. ŘÁD. ÚPRAVY)

PRO k=1 PLATÍ a)

A Z INDUKCE JE $\det(AB) = \det(E_1(E_2 \cdots E_k B)) \overset{a)}{=} \det(E_1)\det((E_2 \cdots E_k)B) =$

$\overset{IP}{=} \det(E_1)\det(E_2 \cdots E_k)\det(B) \overset{IP}{=} \det(\underbrace{E_1 \cdots E_k}_{=A})\det(B) = \underline{\det(A)\det(B)}$ ☒

$\Rightarrow$ PRO REGULÁRNÍ $A \in T^{n\times n}$ JE $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$ (5)

- PROTOŽE $1 = \det(I_n) \underset{I_n = AA^{-1}}{=} \det(AA^{-1}) \underset{\text{VĚTA 5.5}}{=} \det(A)\det(A^{-1})$