TVRZENÍ 2.5

JE-LI U PODPROSTOREM KONEČNĚ GENEROVANÉHO VEKTOROVÉHO PROSTORU V, POTOM PLATÍ:

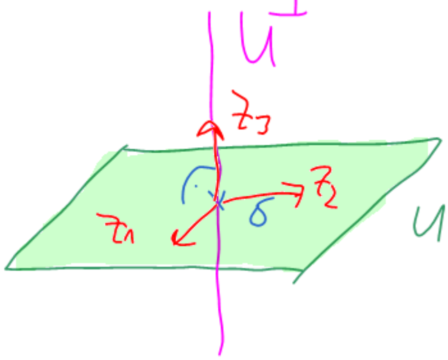
1) JE-LI $z_1, \dots, z_m$ ORTONORMÁLNÍ BÁZÍ U A $z_1, \dots, z_n$ ORTONORMÁLNÍ BÁZÍ V, POTOM $z_{m+1}, \dots, z_n$ JE BÁZÍ $U^\perp$,

2) $\dim(V) = \dim(U) + \dim(U^\perp)$,

3) $V = U + U^\perp$,

4) $U \cap U^\perp = \{o\}$,

5) $(U^\perp)^\perp = U$.



DK (NÁČRT):

1) $z_{m+1}, \dots, z_n$ JE JISTĚ ORTONORMÁLNÍ SYSTÉM
⇒ STAČÍ UKÁZAT, ŽE $\mathrm{SPAN}\{z_{m+1}, \dots, z_n\} = U^\perp$

a) $\supseteq$: $\forall x \in V$ JE $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, z_i \rangle z_i$ VĚTA 2.1

POKUD $x \in U^\perp$, PAK $x = \sum_{i=m+1}^{n} \langle x, z_i \rangle z_i$ $\langle x, z_i \rangle = 0$ PRO $i \le m$

$\Rightarrow x \in \mathrm{SPAN}\{z_{m+1}, \dots, z_n\} \Rightarrow \mathrm{SPAN}\{z_{m+1}, \dots, z_n\} \supseteq U^\perp$

b) $\subseteq$: PRO $x \in \mathrm{SPAN}\{z_{m+1}, \dots, z_n\}$ JE $x = \sum_{i=m+1}^{n} \langle x, z_i \rangle z_i =$

$= 0 \cdot z_i + \sum_{i=m+1}^{n} \langle x, z_i \rangle z_i = \sum_{i=1}^{n} \langle x, z_i \rangle z_i$

- JEDNOZNAČNOSTI SOUŘADNIC JE PAK $\langle x, z_i \rangle = 0$, PRO $i \le m \Rightarrow x \in U^\perp \Rightarrow \mathrm{SPAN}\{z_{m+1}, \dots, z_n\} \subseteq U^\perp$

2), 3), 5) POTÉ PLYNOU PŘÍMO Z 1). 4) PLYNE Z 1) A Z VĚTY O DIMENZI SPOJENÍ $\boxtimes$

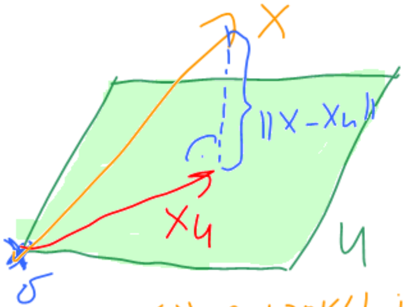
- DŮKAZ ČÁSTI 1) DÁVÁ NÁVOD, JAK ORTOGONÁLNÍ DOPLNĚK SPOČÍTAT V OBECNÉM VEKTOROVÉM PROSTORU

ORTOGONÁLNÍ PROJEKCE:

- JE U VEKTOROVÝM PODPROSTOREM PROSTORU V, PAK **PROJEKCÍ** VEKTORU $x \in V$ DO U JE VEKTOR x_U SPLŇUJÍCÍ

$$\|x - x_U\| = \min_{y \in U} \|x - y\|$$

„x_U JE NEJBLIŽŠÍ VEKTOR Z U K VEKTORU x"



TEDY PROJEKCI LZE POVAŽOVAT ZA ZOBRAZENÍ $x \mapsto x_U$

VĚTA 3.1 (O ORTOGONÁLNÍ PROJEKCI): JE-LI U PODPROSTOR KONEČNĚ GENEROVANÉHO PROSTORU V, PAK PRO KAŽDÉ $x \in V$ EXISTUJE PRÁVĚ 1 PROJEKCE $x_U \in U$ DO U A JE-LI $z_1, \dots, z_m$ ORTONORMÁLNÍ BÁZÍ U, PAK

$$x_U = \sum_{i=1}^{m} \langle x, z_i \rangle z_i .$$

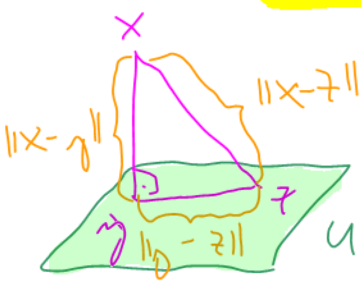
→ PROJEKCE JE LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ

- DK:
  - BUĎ $z_1, \dots, z_m, z_{m+1}, \dots, z_n$ ROZŠÍŘENÍ $z_1, \dots, z_m$ NA ORTONORMÁLNÍ BÁZI V (EXISTUJE PODLE **DŮSLEDKU 2.3**)
  - UKÁŽEME, ŽE $y := \sum_{i=1}^{m} \langle x, z_i \rangle z_i \in U$ JE HLEDANOU PROJEKCÍ x_U
  - MÁME $x - y = \sum_{i=1}^{n} \langle x, z_i \rangle z_i - \sum_{i=1}^{m} \langle x, z_i \rangle z_i = \sum_{i=m+1}^{n} \langle x, z_i \rangle z_i \in U^{\perp}$

    $z_1, \dots, z_m$ JE BÁZÍ U

    VOLBA y

    TVRZENÍ 2.5
  - TEDY $x - y \in U^{\perp}$ Z NÁSLEDUJÍCÍHO TVRZENÍ PAK VYPLÝVÁ, ŽE $y = x_U$ A JE URČENÉ JEDNOZNAČNĚ
  - **TVRZENÍ O KOLMICI**: $x \in V, y \in U, x - y \in U^{\perp} \Rightarrow \|x - y\| < \|x - z\|$ PRO $\forall z \in U \setminus \{y\}$
    - MÁME $(x - y) \perp (y - z)$ A **VĚTA 1.1** ŘÍKÁ, ŽE $\|x - z\|^2 = \|x - y\|^2 + \underbrace{\|y - z\|^2}_{= 0 \iff y = z} > \|x - y\|^2$ $\boxtimes$



3

- PODLE TVRZENÍ 2.5 A VĚTY 3.1 UMÍME SPOČÍTAT ORTOGONÁLNÍ DOPLNĚK A PROJEKCI V KAŽDÉM VEKTOROVÉM PROSTORU ZA POMOCI ORTONORMÁLNÍ BÁZE
- UKÁŽEME SI, ŽE V $\mathbb{R}^m$ TO JDE I BEZ NÍ

1) VÝPOČET ORTOGONÁLNÍHO DOPLŇKU V $\mathbb{R}^m$: SE STANDARDNÍM SKALÁRNÍM SOUČINEM

- PRO PODPROSTOR $U \subseteq \mathbb{R}^m$ UVAŽME MATICI A, JEJÍŽ ŘÁDKY TVOŘÍ SYSTÉM GENERÁTORŮ PODPROSTORU U
- NEBOLI $U = R(A)$ → ŘÁDKOVÝ PROSTOR MATICE A ↳ TEDY ŘÁDKY MOHOU TVOŘIT I BÁZI U
- POTOM $\underline{\underline{U^\perp = \mathrm{Ker}(A)}}$ → JÁDRO MATICE A
- VĚTA 3.2 (VÝPOČET $U^\perp$)

  PRO $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ JE $R(A)^\perp = \mathrm{Ker}(A)$.

- DK:
  - PODLE ČÁSTI 3) TVRZENÍ 2.4 JE $R(A)^\perp = \{A_{1*}^T, \dots, A_{m*}^T\}^\perp$
  - TEDY $x \in R(A)^\perp \iff x$ JE KOLMÉ NA ŘÁDKY $A \iff$ $\iff Ax = o \iff x \in \mathrm{Ker}(A)$ ☒

$$\Rightarrow \mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(A) \underset{\text{SPOJENÍ}}{+} R(A)$$

- DŮSLEDEK 3.3:

  PRO $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ PLATÍ:

  1) $\mathrm{Ker}(A^T A) = \mathrm{Ker}(A)$,
  2) $R(A^T A) = R(A)$,
  3) $\mathrm{RANK}(A^T A) = \mathrm{RANK}(A)$.

$(A^T A)x = A^T(Ax) = A^T o = o$

- DK:
  1) $\supseteq$: $x \in \mathrm{Ker}(A) \Rightarrow Ax = o \Rightarrow (A^T A)x = o \Rightarrow \underline{\underline{x \in \mathrm{Ker}(A^T A)}}$

     $\subseteq$: $x \in \mathrm{Ker}(A^T A) \Rightarrow (A^T A)x = o \Rightarrow x^T A^T A x = o \Rightarrow \|Ax\|^2 = 0 \Rightarrow$

     PŘENÁSOBENÍ x^T — STANDARDNÍ SKALÁRNÍ SOUČIN

     VLASTNOST NORMY $\Rightarrow Ax = o \Rightarrow \underline{\underline{x \in \mathrm{Ker}(A)}}$

  2) $R(A^T A) = \mathrm{Ker}(A^T A)^\perp \overset{1)}{=} \mathrm{Ker}(A)^\perp = R(A)$ — VĚTA 3.2
  3) TRIVIÁLNĚ Z ČÁSTI 2) ☒

2) VÝPOČET ORTOGONÁLNÍ PROJEKCE V $\mathbb{R}^m$ ⇒ SE STANDARDNÍM SKALÁRNÍM SOUČINEM

- PRO PODPROSTOR $U \subseteq \mathbb{R}^m$ BUĎ A MATICE, JEJÍŽ SLOUPCE TVOŘÍ BÁZI PODPROSTORU U
- POTOM PROJEKCE x_U VEKTORU $x \in \mathbb{R}^m$ DO U JE

$$\underline{\underline{x_U = A(A^TA)^{-1}A^Tx}}$$

- **VĚTA 3.4** (VÝPOČET x_U): BUĎ $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ S $\text{RANK}(A) = n$. POTOM PROJEKCE VEKTORU $x \in \mathbb{R}^m$ DO $\mathcal{S}(A)$ JE $x' = A(A^TA)^{-1}A^Tx$.
  - $n = \dim(U)$
  - ↳ SLOUPCOVÝ PROSTOR MATICE A

- DK:
  - x' JE DOBŘE DEFINOVANÉ:
    - $\text{RANK}(A^TA) = n$ PODLE ČÁSTI 3) **DŮSLEDKU 3.3**
    - $\Rightarrow A^TA$ JE REGULÁRNÍ $\Rightarrow (A^TA)^{-1}$ EXISTUJE
  - Z **VĚTY 3.1** VYPLÝVÁ, ŽE PRO $U \subseteq V$ JE $y \in U$ PROJEKCÍ $x \iff x - y \in U^\perp$
  - $\Rightarrow$ STAČÍ UKÁZAT, ŽE $x' \in \mathcal{S}(A)$ A $x - x' \in \mathcal{S}(A)^\perp$

a) $x' \in \mathcal{S}(A)$:

- MÁME $x' = A\underbrace{(A^TA)^{-1}A^Tx}_{z} = Az \in \underline{\underline{\mathcal{S}(A)}}$
  - Az JE LINEÁRNÍ KOMBINACÍ SLOUPCŮ A

b) $x - x' \in \mathcal{S}(A)^\perp$: $\mathcal{S}(A) = \mathcal{R}(A^T)$

- PODLE **VĚTA 3.3** $\mathcal{S}(A)^\perp \overset{!}{=} \mathcal{R}(A^T)^\perp = \text{Ker}(A^T)$ STAČÍ UKÁZAT, ŽE $x - x' \in \text{Ker}(A^T)$. TO PLYNE Z:

$$A^T(x - x') \underset{\text{VOLBA } x'}{=} A^T(x - A(A^TA)^{-1}A^Tx) = A^Tx - \underbrace{A^TA(A^TA)^{-1}}_{= I_n}A^Tx =$$

$$= A^Tx - A^Tx = o \Rightarrow \underline{\underline{x - x' \in \text{Ker}(A^T)}}$$

$\boxtimes$

- UVAŽÍME-LI PROJEKCI JAKO LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ DO U, PAK $P := A(A^TA)^{-1}A^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$ JE JEHO MATICÍ

- MATICE P JE SYMETRICKÁ A PLATÍ $P = P^2$
  ↳ PROJEKCE x JE Px A PROJEKCE Px JE PAK $P^2x = Px$
- TO JSOU NUTNÉ I POSTAČUJÍCÍ PODMÍNKY, ABY MATICE BYLA MATICÍ PROJEKCE
  ↳ BEZ DŮKAZU (STAČÍ UKÁZAT, ŽE $x - Px \in \mathcal{S}(A)^\perp$)
- Z MATICE PROJEKCE DO $U \subseteq \mathbb{R}^m$ LZE SNADNO VYČÍST MATICI PROJEKCE DO $U^\perp$
- VĚTA 3.5 (PROJEKCE DO DOPLŇKU): JE-LI $P \in \mathbb{R}^{m \times m}$ MATICE PROJEKCE DO $U \subseteq \mathbb{R}^m$, PAK $I_m - P$ JE MATICE PROJEKCE DO $U^\perp$.
- DK:
  - PODLE ČÁSTI 3) TVRZENÍ 2.5 LZE KAŽDÉ $x \in \mathbb{R}^m$ JEDNOZNAČNĚ ROZLOŽIT NA $x = y + z$ PRO $y \in U$ A $z \in U^\perp$
  - PODLE VĚTY 3.1 JE y PROJEKCÍ x DO U A z JE PROJEKCÍ DO $U^\perp$. TEDY $z = x - y = x - Px = \underline{\underline{(I_m - P)x}}$ ⊠

POZNÁMKA:
- POKUD SLOUPCE A TVOŘÍ ORTONORMÁLNÍ SYSTÉM, PAK $A^TA = I_m$, COŽ ZNAMENÁ, ŽE $P = A(A^TA)^{-1}A^T = AA^T$
  ↳ OBECNĚ NEMUSÍ PLATIT $AA^T = I_m$