ORTONORMÁLNÍ A ORTOGONÁLNÍ BÁZE:

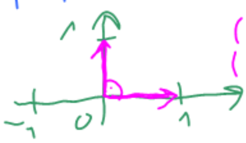
- „HEZČÍ" BÁZE, VE KTERÝCH JSOU VEKTORY NA SEBE KOLMÉ
- UMOŽŇUJÍ NĚKTERÉ PROBLÉMY ŘEŠIT EFEKTIVNĚ

- SYSTÉM VEKTORŮ $z_1, \dots, z_m$ JE **ORTOGONÁLNÍ**, POKUD $\langle z_i, z_j \rangle = 0$ PRO VŠECHNA $i \neq j$.

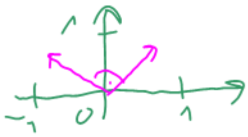
  ↓ VEKTORY JSOU NAVZÁJEM KOLMÉ

$(\sqrt{2}, 0)^T$
$(0, 1)^T$

- SYSTÉM VEKTORŮ $z_1, \dots, z_m$ JE **ORTONORMÁLNÍ**, POKUD JE ORTOGONÁLNÍ A $\|z_i\| = 1$ PRO KAŽDÉ $i = 1, \dots, m$ → KOLMOST + JEDNOTKOVÁ DÉLKA



$(1,0)^T$
$(0,1)^T$



$\frac{\sqrt{2}}{2}(1,1)^T$
$\frac{\sqrt{2}}{2}(-1,1)^T$

- NENULOVÝ ORTOGONÁLNÍ SYSTÉM JDE NA ORTONORMÁLNÍ PŘEŠKÁLOVAT
  (JE-LI $z_1, \dots, z_m$ ORTOGONÁLNÍ, PAK $\frac{z_1}{\|z_1\|}, \dots, \frac{z_m}{\|z_m\|}$ JE ORTONORMÁLNÍ)

- KAŽDÝ ORTONORMÁLNÍ SYSTÉM $z_1, \dots, z_m$ JE LINEÁRNĚ NEZÁVISLÝ

  ORTOGONÁLNÍ SYSTÉM MŮŽE OBSAHOVAT o

  - PROTOŽE JE-LI $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i z_i = o$, TAK PRO KAŽDÉ $k = 1, \dots, m$ PLATÍ

$$0 = \langle o, z_k \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{m} \alpha_i z_i, z_k \right\rangle = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \underbrace{\langle z_i, z_k \rangle}_{=0 \text{ PRO } i \neq k} = \underbrace{\langle z_k, z_k \rangle}_{=1} \alpha_k = \alpha_k$$

LINEARITA 1. SOUŘADNICE

- ORTONORMALITA PŘINÁŠÍ NĚKTERÉ VÝHODY: UKÁŽE TŘEBA SNADNO SPOČÍTAT SOUŘADNICE VŮČI ORTONORMÁLNÍ BÁZI

- **VĚTA 2.1** (**FOURIEROVY KOEFICIENTY**): JE-LI $z_1, \dots, z_m$ ORTONORMÁLNÍ BÁZÍ PROSTORU V, PAK PRO KAŽDÉ $x \in V$ PLATÍ $x = \sum_{i=1}^{m} \langle x, z_i \rangle z_i$

  ↳ NEBOLI i-TOU SOUŘADNICÍ JE $\langle x, z_i \rangle$

- DK:
  - ZE ZIMNÍHO SEMESTRU VÍME, ŽE $x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i z_i$ A SOUŘADNICE $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ JSOU JEDNOZNAČNĚ URČENÉ
  - NYNÍ PRO KAŽDÉ $k = 1, \dots, m$ PLATÍ, ŽE

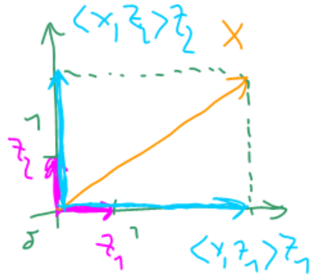
$$\langle x, z_k \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{m} \alpha_i z_i, z_k \right\rangle = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \underbrace{\langle z_i, z_k \rangle}_{=0 \text{ PRO } i \neq k} = \alpha_k \underbrace{\langle z_k, z_k \rangle}_{=1} = \alpha_k$$

LINEARITA 1. SOUŘADNICE

- VYJÁDŘENÍ $x = \sum_{i=1} \langle x, z_i \rangle z_i$ SE NAZÝVÁ FOURIERŮV ROZVOJ A SKALÁRY $\langle x, z_i \rangle$ FOURIEROVY KOEFICIENTY

(2)

- $\langle x, z_i \rangle z_i$ = PROJEKCE x NA PŘÍMKU $\mathrm{SPAN}\{z_i\}$
- x PAK LZE SLOŽIT SOUČTEM TĚCHTO PROJEKCÍ



- GRAMOVA – SCHMIDTOVA ORTOGONALIZACE
  - METODA, JAK LIBOVOLNOU BÁZI PŘETRANSFORMOVAT NA ORTONORMÁLNÍ BÁZI
  - ALGORITMUS (GRAMOVA-SCHMIDTOVA ORTOGONALIZACE):

    VSTUP: LINEÁRNĚ NEZÁVISLÉ VEKTORY $x_1, \dots, x_m \in V$

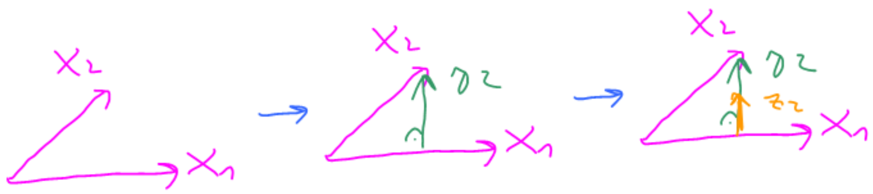
    VÝSTUP: ORTONORMÁLNÍ BÁZE $z_1, \dots, z_m$ PROSTORU $\mathrm{SPAN}\{x_1, \dots, x_m\}$

    1) PRO $k = 1, \dots, m$:

       2) NASTAV $y_k := x_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle x_k, z_j \rangle z_j$ – VÝPOČET KOLMICE NA $z_1, \dots, z_{k-1}$

       3) NASTAV $z_k := \frac{1}{\|y_k\|} y_k$ – PŘESKÁLOVÁNÍ NA DÉLKU 1

- PŘÍKLAD:



- DŮKAZ SPRÁVNOSTI ALGORITMU:
  - INDUKCÍ PODLE m UKÁŽEME, ŽE $z_1, \dots, z_m$ JE ORTONORMÁLNÍ BÁZÍ PROSTORU $\mathrm{SPAN}\{x_1, \dots, x_m\}$
  - ZAČÁTEK INDUKCE – PRO $m = 1$ JE $y_1 = x_1 \neq 0$ ($x_1, \dots, x_m$ JSOU LINEÁRNĚ NEZÁVISLÉ)

    $\Rightarrow z_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$ JE DOBŘE DEFINOVANÝ A $\mathrm{SPAN}\{x_1\} = \mathrm{SPAN}\{z_1\}$

  - INDUKČNÍ KROK $m-1 \longrightarrow m$:
    - NECHŤ $z_1, \dots, z_{m-1}$ JE ORTONORMÁLNÍ BÁZÍ $\mathrm{SPAN}\{x_1, \dots, x_{m-1}\}$
    - POKUD $y_m = 0$, PAK $x_m = \sum_{j=1}^{m-1} \langle x_m, z_j \rangle z_j$ A TAK

      Z KROKU 2) (VOLBA y_m)

      $x_m \in \mathrm{SPAN}\{z_1, \dots, z_{m-1}\} \underset{\mathrm{IP}}{=} \mathrm{SPAN}\{x_1, \dots, x_{m-1}\}$, COŽ NELZE

      $x_1, \dots, x_m$ JSOU LINEÁRNĚ NEZÁVISLÉ

    $\Rightarrow y_m \neq 0$ A $z_m = \frac{y_m}{\|y_m\|}$ JE DOBŘE DEFINOVANÝ

    A $\|z_m\| = 1$

- PODLE **IP** STAČÍ UKÁZAT, ŽE $\langle z_m, z_i \rangle = 0$ PRO $i < m$ (3)
  ↳ VÍME, ŽE $z_1, \dots, z_{m-1}$ JE ORTONORMÁLNÍ SYSTÉM

- MÁME $\langle z_m, z_i \rangle = \frac{1}{\|y_m\|} \langle y_m, z_i \rangle = \frac{1}{\|y_m\|} \left\langle x_m - \sum_{j=1}^{m-1} \langle x_m, z_j \rangle z_j, z_i \right\rangle =$

$z_m = \frac{y_m}{\|y_m\|}$ VOLBA y_m

LINEARITA $= \frac{1}{\|y_m\|} \langle x_m, z_i \rangle - \frac{1}{\|y_m\|} \sum_{j=1}^{m-1} \langle x_m, z_j \rangle \langle z_j, z_i \rangle =$

$\langle z_j, z_i \rangle = 0$ PRO $j \neq i$ A $\langle z_i, z_i \rangle = 1$ $= \frac{1}{\|y_m\|} \langle x_m, z_i \rangle - \frac{1}{\|y_m\|} \langle x_m, z_i \rangle = \underline{\underline{0}}$

$\Rightarrow z_1, \dots, z_m$ JE ORTONORMÁLNÍ SYSTÉM

- ZBÝVÁ OVĚŘIT $\mathrm{SPAN}\{z_1, \dots, z_m\} = \mathrm{SPAN}\{x_1, \dots, x_m\}$:
  i) $\subseteq$: Z ALGORITMU JE $z_m \in \mathrm{SPAN}\{z_1, \dots, z_{m-1}, x_m\} \subseteq \mathrm{SPAN}\{x_1, \dots, x_m\}$
  ii) $\supseteq$: PLYNE Z TOHO, ŽE OBA PROSTORY MAJÍ STEJNOU DIMENZI $\boxtimes$

- VÝPOČETNÍ SLOŽITOST JE $2mn^2$ PRO $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^m$

$\Rightarrow$ KAŽDÝ $\overbrace{\text{KONEČNĚ GENEROVANÝ}}^{\text{NUTNÝ PŘEDPOKLAD}}$ VEKTOROVÝ PROSTOR (SE SKALÁRNÍM SOUČINEM) MÁ ORTONORMÁLNÍ BÁZI
  - STAČÍ POUŽÍT GRAMOVU-SCHMIDTOVU ORTOGONALIZACI NA LIBOVOLNOU BÁZI ↗ ZE ZIMNÍHO SEMESTRU VÍME, ŽE EXISTUJE

- **DŮSLEDEK 2.2** (ROZŠÍŘENÍ NA ORTONORMÁLNÍ BÁZI):
  KAŽDÝ ORTONORMÁLNÍ SYSTÉM VEKTORŮ V KONEČNĚ GENEROVANÉM VEKTOROVÉM PROSTORU LZE ROZŠÍŘIT NA ORTONORMÁLNÍ BÁZI
  - <u>DK</u>:
    ORTONORMÁLNÍ SYSTÉM $z_1, \dots, z_m$ ROZŠÍŘÍME NA BÁZI (ZE ZIMNÍHO SEMESTRU VÍME, ŽE TO JDE)
    $z_1, \dots, z_m, x_{n-m}, \dots, x_n$ A TU ZORTOGONALIZUJEME $\boxtimes$

- NÁSLEDUJÍCÍ VÝSLEDEK UKAZUJE, JAK ZAVÉST SKALÁRNÍ SOUČIN VE VEKTOROVÉM PROSTORU ZA POMOCI STANDARDNÍHO SKALÁRNÍHO SOUČINU

- JE-LI $B = \{z_1, \dots, z_m\}$ BÁZE PROSTORU V, PAK ZOBRAZENÍ $\langle x, y\rangle := [x]_B^T \overline{[y]_B}$ PŘEDSTAVUJE SKALÁRNÍ SOUČIN A B JE V NĚM ORTONORMÁLNÍ BÁZÍ.
  ↳ TEDY $\langle z_i, z_j\rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$

  - OVĚŘÍME VLASTNOSTI SKALÁRNÍHO SOUČINU
    1) $\langle x, x\rangle = [x]_B^T \cdot \overline{[x]_B} \geq 0$ A ROVNOST PLATÍ POUZE PRO $[x]_B = 0 \Leftrightarrow x = 0$
       Z JEDNOZNAČNOSTI SOUŘADNIC
    2),3) VYPLÝVAJÍ Z LINEARITY SOUŘADNIC
    4) ZE SYMETRIE STANDARDNÍHO SKALÁRNÍHO SOUČINU
  - ORTONORMALITA BÁZE B PLYNE Z $\langle z_i, z_j\rangle = [z_i]_B^T \overline{[z_j]_B} = e_i^T e_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$ $\boxtimes$

- DOKONCE PLATÍ, ŽE $\langle \cdot, \cdot\rangle$ JE SKALÁRNÍM SOUČINEM NA $V \Leftrightarrow$ SE DÁ VYJÁDŘIT JAKO $\langle x, y\rangle = [x]_B^T \overline{[y]_B}$ PRO NĚJAKOU ORTONORMÁLNÍ BÁZI B

- TVRZENÍ 2.3: SE SKALÁRNÍM SOUČINEM $\langle \cdot, \cdot\rangle$, JE-LI B ORTONORMÁLNÍ BÁZÍ PROSTORU V
  PAK $\forall x, y: \langle x, y\rangle = [x]_B^T \overline{[y]_B}$.

  - DK:
    - JE-LI BÁZE $B = \{z_1, \dots, z_m\}$, PAK VĚTA 2.1 DÁVÁ $[x]_B = (\langle x, z_1\rangle, \dots, \langle x, z_m\rangle)^T$
    - POTOM $\langle x, y\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{m} \langle x, z_j\rangle z_j, y \right\rangle \underset{\text{LINEARITA}}{=} \sum_{j=1}^{m} \langle x, z_j\rangle \langle z_j, y\rangle \underset{\text{SYMETRIE}}{=}$
      $= \sum_{j=1}^{m} \langle x, z_j\rangle \overline{\langle y, z_j\rangle} = [x]_B^T \overline{[y]_B}$ $\boxtimes$

- ORTOGONÁLNÍ DOPLNĚK:
  - ZAVEDEME POJMY A METODY, KTERÉ UMOŽNÍ SPOČÍTAT VZDÁLENOST BODU OD PODPROSTORU A TAKÉ PRO URČENÍ NEJBLIŽŠÍHO BODU Z DANÉHO PODPROSTORU

  - JE-LI V VEKTOROVÝ PROSTOR A $M \subseteq V$, PAK ORTOGONÁLNÍ DOPLNĚK MNOŽINY M JE $M^\perp := \{x \in V : \langle x, y\rangle = 0 \text{ PRO } \forall y \in M\}$
    ↳ MNOŽINA VEKTORŮ, KTERÉ JSOU KOLMÉ NA VŠECHNY VEKTORY Z M

  - PLATÍ $\{0\}^\perp = V$ A $V^\perp = \{0\}$

- **TVRZENÍ 2.4** (VLASTNOSTI ORTOGONÁLNÍHO DOPLŇKU):
  JE-LI V VEKTOROVÝ PROSTOR A $M, N \subseteq V$, PAK:
  1) $M^\perp$ JE PODPROSTOR V,
  2) $M \subseteq N \Rightarrow M^\perp \supseteq N^\perp$,
  3) $M^\perp = \mathrm{span}(M)^\perp$.

- DK (NÁČRT):
  1) STAČÍ OVĚŘIT $o \in M^\perp$ A UZAVŘENOST $M^\perp$ NA SČÍTÁNÍ A NÁSOBENÍ SKALÁREM
  2) PRO $x \in N^\perp$ JE $\langle x, y \rangle = 0$ PRO $\forall y \in N$, ČÍMŽ SPÍŠ $\langle x, y \rangle = 0$ PRO $\forall y \in M \subseteq N$
  3) $\supseteq$: PLYNE ZE 2), PROTOŽE $M \subseteq \mathrm{span}(M)$
     $\subseteq$: PLYNE Z FAKTU, ŽE JE-LI VEKTOR KOLMÝ NA VEKTORY Z M, PAK JE KOLMÝ I NA JEJICH LINEÁRNÍ KOMBINACE $\boxtimes$

- **TVRZENÍ 2.5**:
  JE-LI U PODPROSTOREM KONEČNĚ GENEROVANÉHO VEKTOROVÉHO PROSTORU V, POTOM PLATÍ
  1) JE-LI $z_1, \dots, z_m$ ORTONORMÁLNÍ BÁZÍ U A $z_1, \dots, z_n$ ORTONORMÁLNÍ BÁZÍ V, POTOM $z_{m+1}, \dots, z_n$ JE BÁZÍ $U^\perp$,
  2) $\dim(V) = \dim(U) + \dim(U^\perp)$,
  3) $V = U + U^\perp$,
  4) $U \cap U^\perp = \{o\}$,
  5) $(U^\perp)^\perp = U$.

- (ZATÍM) BEZ DŮKAZU