- DOKÁZEME NÁSLEDUJÍCÍ VÝSLEDEK Z MINULA, KTERÝ ŘÍKÁ, ŽE MATICE KVADRATICKÝCH FOREM NA $\mathbb{R}^n$ LZE (HEZKY) DIAGONALIZOVAT (1)

- **VĚTA 13.5** (**SYLVESTERŮV ZÁKON SETRVAČNOSTI**):

JE-LI $f(x) = x^T A x$ KVADRATICKOU FORMOU NA $\mathbb{R}^n$, PAK EXISTUJE BÁZE, VŮČI NÍŽ MÁ f DIAGONÁLNÍ MATICI S PRVKY $-1, 0, 1$. NAVÍC JE TATO MATICE AŽ NA POŘADÍ PRVKŮ JEDNOZNAČNÁ

TZV. **POLÁRNÍ BÁZE** → EXISTUJE I PRO PROSTORY NAD LIBOVOLNÝM TĚLESEM CHARAKTERISTIKY $\neq 2$

- NAPŘÍKLAD MATICI $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ FORMY NAD $\mathbb{Z}_2$ NELZE DIAGONALIZOVAT

⇒ „KLASIFIKACE" KVADRATICKÝCH FOREM V $\mathbb{R}^2$ (VIZ PREZENTACE)

- DK:

1) EXISTENCE:

- PROTOŽE A JE REÁLNÁ SYMETRICKÁ MATICE, TAK PODLE **VĚTY 9.3** EXISTUJE ROZKLAD $A = Q \Lambda Q^T$, KDE Λ JE DIAGONÁLNÍ MATICÍ S $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ NA DIAGONÁLE A Q JE ORTOGONÁLNÍ MATICÍ

$\Rightarrow \Lambda = Q^T \Lambda Q$ → Q JE ORTOGONÁLNÍ A TEDY $Q^T = Q^{-1}$

- NA DIAGONÁLE CHCEME ± 1 A 0 ⇒ DEFINUJME DIAGONÁLNÍ $\Lambda' \in \mathbb{R}^{n \times n}$, KDE $\Lambda'_{ii} := \begin{cases} \sqrt{|\lambda_i|} & \lambda_i \neq 0 \\ 1 & \lambda_i = 0 \end{cases}$

- POTOM $\Lambda' Q^T A Q \Lambda'$ JE VYJÁDŘENÍM A VŮČI BÁZI B, KTERÁ JE TVOŘENÁ SLOUPCI MATICE $Q\Lambda'$

↳ LZE TOTIŽ $Q\Lambda'$ POVAŽOVAT ZA $_{KAN}[id]_B$ A KVŮLI PŘECHODU NA KANONICKOU BÁZI JSOU SLOUPCE B = SLOUPCŮM $_{KAN}[id]_B = Q\Lambda'$

- Z KONSTRUKCE JE $\Lambda' Q^T A Q \Lambda'$ DIAGONÁLNÍ S $-1, 0, 1$ NA DIAGONÁLE

- MÁME $\Lambda' \underbrace{Q^T A Q}_{= \Lambda^T = \Lambda} \Lambda' = \Lambda' \Lambda \Lambda'$ A $(\Lambda' \Lambda)_{ii} = \begin{cases} \frac{\lambda_i}{\sqrt{|\lambda_i|}} & \lambda_i \neq 0 \\ 0 & \lambda_i = 0 \end{cases}$

A $(\Lambda' \Lambda \Lambda')_{ii} = \begin{cases} \frac{\lambda_i}{|\lambda_i|} \in \{-1, 1\} & \lambda_i \neq 0 \\ 0 & \lambda_i = 0 \end{cases}$

2) JEDNOZNAČNOST:

– SPOREM – MĚJME 2 RŮZNÉ DIAGONALIZACE D A D':

$$
D = \begin{array}{c}\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & 0 & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \\ 1 \cdots p \cdots q \cdots n \end{array}
\qquad
D' = \begin{array}{c}\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & 0 & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \\ 1 \cdots s \cdots t \cdots n \end{array}
$$

– NECHŤ D ODPOVÍDÁ BÁZI $B = \{w_1, \dots, w_n\}$ A D' BÁZI $B' = \{w'_1, \dots, w'_n\}$

– UVAŽME LIBOVOLNÉ $u \in \mathbb{R}^n$ A JEHO SOUŘADNICE $y := [u]_B$
$z := [u]_{B'}$

– PAK PODLE VĚTY 13.1 PRO KVADRATICKÉ FORMY PLATÍ:

(*)
$$f(u) = [u]_B^T D [u]_B = y^T D y = y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_q^2$$
$$f(u) = [u]_{B'}^T D' [u]_{B'} = z^T D' z = z_1^2 + \dots + z_s^2 - z_{s+1}^2 - \dots - z_t^2$$

– MUSÍ PLATIT $q = t$, PROTOŽE $D = S^T D' S$ PRO REGULÁRNÍ $S = {}_{B'}[id]_B$

$\Rightarrow q = \text{RANK}(D) = \text{RANK}(D') = t \Rightarrow \underline{q = t}$

– TAKÉ MUSÍ PLATIT $p = s$, PROTOŽE:

– SPOREM – BÚNO – NECHŤ $p > s$ (JINAK PROHODIT D A D')

– DEFINUJME PROSTORY $P := \text{SPAN}\{w_1, \dots, w_p\}$ A $R := \text{SPAN}\{w'_{s+1}, \dots, w'_n\}$

– POTOM $\dim(P \cap R) = \underbrace{\dim(P)}_{=p} + \underbrace{\dim(R)}_{=n-s} - \underbrace{\dim(P+R)}_{\leq n} \geq p + (n-s) - n =$

VĚTA O DIMENZI SPOJENÍ A PRŮNIKU ZE ZS

$= p - s \geq 1$

$p > s$

PODLE (*)

$\Rightarrow \exists$ NENULOVÝ $u \in P \cap R$ TAKOVÝ, ŽE $u = \sum_{i=1}^{p} y_i w_i = \sum_{j=s+1}^{n} z_j w'_j$

– PAK $f(u) = \begin{cases} y_1^2 + \dots + y_p^2 > 0 & u \neq 0 \\ -z_{s+1}^2 - \dots - z_t^2 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{\text{SPOR}}$

– PROTOŽE $p = s$ A $q = t$, TAK $D = D'$, COŽ JE $\underline{\text{SPOR}}$ ⊠

– JEDNOZNAČNOST VEDE NA POJEM **SIGNATURY** KVADRATICKÉ FORMY, COŽ JE TROJICE (p,q,n), KDE p = POČET 1, q = POČET −1, n = POČET 0 V DIAGONÁLNÍ MATICI VŮČI POLÁRNÍ BÁZI

– MÁ DŮSLEDKY I PRO SAMOTNOU MATICI

DŮSLEDEK 14.1: JE-LI $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ SYMETRICKÁ A S^TAS JE JEJÍ PŘEVOD NA DIAGONÁLNÍ TVAR S $-1,0,1$ NA DIAGONÁLE, PAK:

POČET 1 = POČET KLADNÝCH VLASTNÍCH ČÍSEL A

POČET −1 = POČET ZÁPORNÝCH VLASTNÍCH ČÍSEL A

POČET 0 = POČET NULOVÝCH VLASTNÍCH ČÍSEL A

– DK: – Z DŮKAZU **VĚTY 13.5** PRO KVADRATICKOU FORMU $f(x) = x^TAx$

– EXISTENCE ⇒ S^TAS SE ZÍSKÁ ZE SPEKTRÁLNÍHO ROZKLADU A A TVRZENÍ TAK PRO NI PLATÍ

– JEDNOZNAČNOST ⇒ PLATÍ I PRO KAŽDOU JINOU DIAGONALIZACI ⊠

– DOSTÁVÁME TAKÉ DŮSLEDEK PRO POZITIVNÍ (SEMI-)DEFINITNOST

DŮSLEDEK 14.2: JE-LI $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ SYMETRICKÁ A S^TAS JE JEJÍ PŘEVOD NA DIAGONÁLNÍ TVAR S $-1,0,1$ NA DIAGONÁLE, PAK

1) A JE POZITIVNĚ DEFINITNÍ ⇔ S^TAS MÁ KLADNOU DIAGONÁLU

2) A JE POZITIVNĚ SEMIDEFINITNÍ ⇔ S^TAS MÁ NEZÁPORNOU DIAGONÁLU

– DK: – PŘÍMO Z **DŮSLEDKU 14.1** A **VĚT 11.2** A **11.3** ⊠

– DIAGONALIZACE MATICE KVADRATICKÉ FORMY LZE SPOČÍTAT EL. ÚPRAVAMI. STAČÍ:

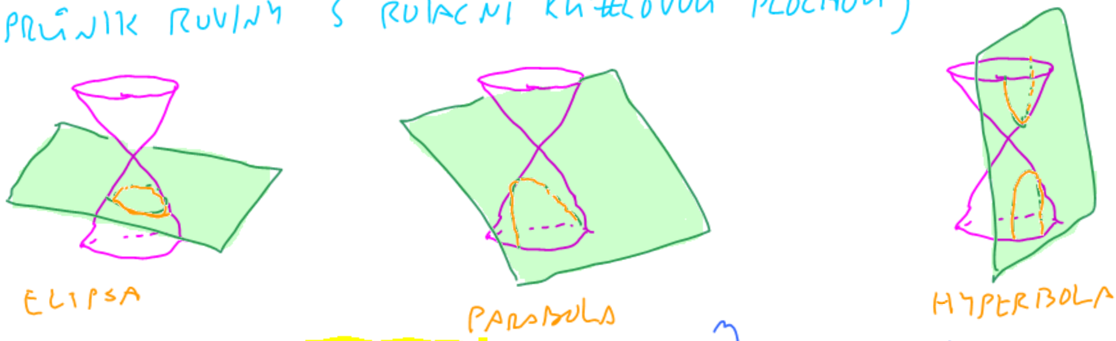
– STAČÍ PROVÁDĚT ŘÁDKOVÉ A ODPOVÍDAJÍCÍ SLOUPCOVÉ ÚPRAVY A NULOVAT TAK PRVKY POD PIVOTEM A VPRAVO OD NĚJ

– JE-LI PIVOT $\neq 0$, PAK STAČÍ PŘIČÍTAT NÁSOBKY ŘÁDKŮ I SLOUPCŮ

– JE-LI PIVOT $= 0$, PAK JE POTŘEBA PŘIČÍST VHODNÝ ŘÁDEK POD NÍM A TOTÉŽ PRO SLOUPCE (POKUD JSOU POD PIVOTEM JEN NULY, POKRAČUJEME DÁLE VPRAVO OD NĚJ)

KUŽELOSEČKY A KVADRIKY:

- NYNÍ JIŽ MÁME NÁSTROJE, ABYCHOM ZVLÁDLI ALGEBRAICKY PRACOVAT S OBJEKTY, JAKÝMI JSOU NAPŘÍKLAD **KUŽELOSEČKY** (= KŘIVKY VZNIKLÉ JAKO PRŮNIK ROVINY S ROTAČNÍ KUŽELOVOU PLOCHOU)



- OBECNĚJŠÍ POJEM JE **KVADRIKA** $= \{x \in \mathbb{R}^n : x^T A x + bx + c = 0\}$, KDE $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ JE SYMETRICKÁ, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$
- POMOCÍ ALGEBRAICKÝCH VLASTNOSTÍ A (VLASTNÍ ČÍSLA, SIGNATURA, ...) LZE KVADRIKY KLASIFIKOVAT - MÁME NAPŘ. ELIPSOID, PARABOLOID, HYPERBOLOID, ...
- NAHLÉDNUTÍ TYPU KVADRIKY SE DĚLÁ NÁSLEDOVNĚ (**TRANSFORMACE KVADRIKY**):
  - MÁME OBECNÝ ZÁPIS $x^T A x + b^T x + c = 0$ SE SYMETRICKOU A VŮČI BÁZI B
  - NAJDEME BÁZI B' TAK, ABY ${}_B[id]_{B'}$ BYLA ORTOGONÁLNÍ A $A' := {}_B[id]_{B'}^T \, A \, {}_B[id]_{B'}$ DIAGONÁLNÍ (SPEKTRÁLNÍ ROZKLAD)
  - PO SUBSTITUCI $y := {}_B[id]_{B'}^T x$ DOSTANEME $y^T A' y + b'^T y + c$, KDE $b' := {}_B[id]_{B'} b$ (NATOČENÍ SYSTÉMU SOUŘADNIC)
  - PRO $A'_{ii} \neq 0$ NYNÍ ZVOLÍME SUBSTITUCI, KTERÁ NÁS ZBAVÍ ODPOVÍDAJÍCÍCH LINEÁRNÍCH ČLENŮ (POSUN POČÁTKU)
    - ZVOLÍME $z_i := y_i + \frac{b'_i}{2A'_{ii}}$ (PRO $A'_{ii} = 0$ JE $z_i := y_i$)

    (POTOM $A'_{ii} y_i^2 + b'_i y_i = A'_{ii}\left(z_i - \frac{b'_i}{2A'_{ii}}\right)^2 + b'_i\left(z_i - \frac{b'_i}{2A'_{ii}}\right) =$

    $= A'_{ii} z_i^2 - \frac{b'^2_i}{4A'_{ii}}$ → NYNÍ JIŽ BEZ LINEÁRNÍHO ČLENU

  ⇒ MÁME VYJÁDŘENÍ $z^T A' z + b''^T z + c''$, KDE $b''_i = \begin{cases} 0 & A'_{ii} \neq 0 \\ b'_i & A'_{ii} = 0 \end{cases}$

  A $c'' = c' - \sum_{A'_{ii} \neq 0} \frac{b'^2_i}{4A'_{ii}}$ ⇒ LZE SNÁZ ODVODIT TVAR, STŘED, OSY, ...

  - VIZ PŘÍKLAD V PREZENTACI