BILINEÁRNÍ FORMY:

- NAHLÉDNEME JINÉ NEŽ LINEÁRNÍ OBJEKTY A UKÁŽEME SI SOUVISLOSTI S JIŽ PROBRANÝMI POJMY
- NECHŤ V JE VEKTOROVÝ PROSTOR NAD TĚLESEM $\mathbb{T}$
- **BILINEÁRNÍ FORMOU** JE ZOBRAZENÍ $b: V \times V \to \mathbb{T}$, KTERÉ JE LINEÁRNÍ V OBOU SLOŽKÁCH
  - NEBOLI $\forall u,v,w \in V$, $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{T}$ PLATÍ:

$$b(\alpha u+\beta v, w) = \alpha b(u,w) + \beta b(v,w),$$
$$b(w, \alpha u+\beta b) = \alpha b(w,u) + \beta b(w,v).$$

$\Rightarrow b(v,0) = 0 = b(0,v)$ PRO $\forall v \in V$

- BILINEÁRNÍ FORMA JE **SYMETRICKÁ**, POKUD $b(u,v) = b(v,u)$ PRO KAŽDÉ $u,v \in V$
- PŘÍKLADY BILINEÁRNÍCH FOREM:
  1) KAŽDÝ REÁLNÝ SKALÁRNÍ SOUČIN NA PROSTORU V
     - KOMPLEXNÍ SKALÁRNÍ SOUČIN BILINEÁRNÍ FORMOU NENÍ $\to$ NENÍ LINEÁRNÍ VE 2. SLOŽCE
  2) ZOBRAZENÍ $b: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ DANÉ PŘEDPISEM $b(x,y) = x^T A y$, KDE $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
     - PRO $n=1$ DOSTÁVÁME $b(x,y) = axy$ PRO $a \in \mathbb{R}$
  3) ZOBRAZENÍ $b: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ DANÉ PŘEDPISEM $b(x,y) = x_1 y_1 + 4x_1 y_2 + 4x_2 y_1 + 10 x_2 y_2$ PRO $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ JE SYMETRICKÁ BILINEÁRNÍ FORMA
- BILINEÁRNÍ FORMY JSOU JEDNOZNAČNĚ URČENÉ OBRAZY BÁZÍ A DAJÍ SE VYJÁDŘIT MATICOVĚ
- FORMÁLNĚ: JE-LI $b: V \times V \to \mathbb{T}$ BILINEÁRNÍ FORMA A $B = \{w_1, \dots, w_n\}$ BÁZE V, PAK PRO VEKTORY $x = \sum_{i=1}^{n} x_i w_i$, $y = \sum_{j=1}^{n} y_j w_j$ PLATÍ

$$b(x,y) = b\left(\sum_{i=1}^{n} x_i w_i, \sum_{j=1}^{n} y_j w_j\right) \underset{\text{LINEARITA}}{=} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \, b(w_i, w_j)$$

$\Rightarrow$ K URČENÍ b STAČÍ ZNÁT OBRAZY DVOJIC BÁZICKÝCH VEKTORŮ

- **MATICÍ b VZHLEDEM K B** JE MATICE $A \in \mathbb{T}^{n \times n}$ DANÁ PŘEDPISEM

$$A_{ij} = b(w_i, w_j)$$

- **VĚTA 13.1** (MATICOVÉ VYJÁDŘENÍ BILINEÁRNÍCH FOREM):
  JE-LI B BÁZÍ V A b JE BILINEÁRNÍ FORMOU NA V, PAK
  A JE MATICÍ b VZHLEDEM K B $\Leftrightarrow$ $\forall u,v \in V: b(u,v) = [u]_B^T A [v]_B$

- DK:
  - OZNAČME $x := [u]_B$, $y := [v]_B$, $B = \{w_1, \dots, w_n\}$

  i) $\Rightarrow$: JE-LI A MATICÍ FORMY b, PAK

$$b(u,v) \underset{\text{LINEARITA}}{=} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \underbrace{b(w_i,w_j)}_{=A_{ij}} \underset{\text{MATICOVÉ NÁSOBENÍ}}{=} x^T A y$$

  ii) $\Leftarrow$: DOSAZENÍM $u := w_i$, $v := w_j$ Z $b(u,v) = [u]_B^T A [v]_B$
  DOSTANEME $b(w_i,w_j) = \underbrace{[w_i]_B^T}_{=e_i^T} A \underbrace{[w_j]_B}_{=e_j} = e_i^T A e_j = A_{ij}$ ☒

- **DŮSLEDEK 13.2**:
  JE-LI $B = \{w_1, \dots, w_n\}$ BÁZÍ NAD V NAD $\mathbb{T}$ A $A \in \mathbb{T}^{n \times n}$, PAK
  EXISTUJE JEDINÁ BILINEÁRNÍ FORMA $b: V \times V \to \mathbb{T}$ TAKOVÁ,
  ŽE $b(w_i,w_j) = A_{ij}$ PRO KAŽDÉ $i,j = 1, \dots, n$.

- DK:
  1) EXISTENCE: STAČÍ OVĚŘIT, ŽE $b: V \times V \to \mathbb{T}$ DANÉ PŘEDPISEM
  $b(u,v) = [u]_B^T A [v]_B$ VYHOVUJE DEFINICI BILINEÁRNÍ FORMY
  ↳ ANO, $u \mapsto [u]_B$ JE TOTIŽ LINEÁRNÍ

  2) JEDNOZNAČNOST:
  PODLE VĚTY 13.1 KAŽDÁ TAKOVÁ BILINEÁRNÍ FORMA SPLŇUJE
  $b(u,v) = [u]_B^T A [v]_B$ A JE TEDY JEDNOZNAČNĚ URČENA ☒

- PRO PEVNOU BÁZI B TEDY MÁME BIJEKCI MEZI BILINEÁRNÍMI FORMAMI $b: V \times V \to \mathbb{T}$ A MATICEMI $A \in \mathbb{T}^{n \times n}$
  - JEDNÁ SE O IZOMORFISMUS
    ↳ UVÁŽÍME-LI PŘIROZENÉ SOUČTY A NÁSOBKY BILINEÁRNÍCH FOREM JAKO NA PROSTORU

- JE-LI $V = \mathbb{T}^n$, PAK JE BILINEÁRNÍ FORMY DAJÍ VYJÁDŘIT VE SPECIÁLNÍM TVARU

DŮSLEDEK 13.3: KAŽDÁ BILINEÁRNÍ FORMA b NA $\mathbb{T}^n$ SE DÁ VYJÁDŘIT VE TVARU $b(x,y) = x^T A y$, KDE $A \in \mathbb{T}^{n \times n}$

↳ BEZ SOUŘADNIC

- DK:
  - STAČÍ VZÍT A JAKO MATICI b VZHLEDEM KE KANONICKÉ BÁZI ☒

    ↳ POTOM $b(x,y) = [x]_{KAN}^T A [y]_{KAN} = x^T A y$

- NÁSLEDUJÍCÍ VÝSLEDEK ŘÍKÁ, JAK SE ZMĚNÍ MATICE BILINEÁRNÍ FORMY, POKUD ZMĚNÍME BÁZI

VĚTA 13.4 (MATICE BILINEÁRNÍ FORMY PŘI ZMĚNĚ BÁZE): NECHŤ JE b BILINEÁRNÍ FORMA NA V A BUĎ A MATICÍ b VŮČI BÁZI B. BUĎ B' JINOU BÁZÍ V A $S = {}_B[id]_{B'}$. PAK $S^T A S$ JE MATICÍ b VZHLEDEM K B'.

$S = {}_B[id]_{B'}$ ↳ MATICE PŘECHODU OD B' K B

- DK:
  - BUĎ $u, v \in V$
  - PAK $b(u,v) \overset{\text{VĚTA 13.1}}{=} [u]_B^T A [v]_B \overset{\text{PŘECHOD MEZI SOUŘADNICEMI}}{=} ({}_B[id]_{B'} \cdot [u]_{B'})^T \cdot A \cdot ({}_B[id]_{B'} [v]_{B'}) = [u]_{B'}^T \underbrace{S^T}_{} A S [v]_{B'}$

    $S = {}_B[id]_{B'}$
  - PODLE VĚTY 13.1 JE TAK $S^T A S$ MATICÍ b VŮČI B' ☒

$\Rightarrow$ RŮZNÉ BÁZE DÁVAJÍ RŮZNÉ MATICOVÉ REPREZENTACE b

- CHCEME MATICI CO NEJJEDNODUŠŠÍ (DIAGONÁLNÍ)

- VE ZBYTKU PŘEDNÁŠKY SE ZAMĚŘÍME NA SPECIÁLNĚJŠÍ ZOBRAZENÍ

- KVADRATICKÉ FORMY:
  - NECHŤ V JE VEKTOROVÝ PROSTOR NAD TĚLESEM $\mathbb{T}$
  - ZOBRAZENÍ $f: V \to \mathbb{T}$ JE KVADRATICKOU FORMOU, POKUD $\exists$ SYMETRICKÁ BILINEÁRNÍ FORMA b TAKOVÁ, ŽE $\forall u \in V: f(u) = b(u,u)$
    - PAK ŘÍKÁME, ŽE b INDUKUJE f

    $\Rightarrow f(0) = 0$
  - PŘÍKLADY KVADRATICKÝCH FOREM:

    1) ZOBRAZENÍ $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ DANÉ PŘEDPISEM $f(x) = x^T A x$ PRO $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
       - NEBOLI $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_i x_j$
       - PRO $n=1$ DOSTÁVÁME $f(x) = a x^2$ PRO $a \in \mathbb{R}$ (PARABOLA)

    2) ZOBRAZENÍ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ DANÉ PŘEDPISEM $f(x) = x_1^2 + 8x_1x_2 + 10x_2^2$ JE KVADRATICKÁ FORMA INDUKOVANÁ SYMETRICKOU BILINEÁRNÍ FORMOU $b(x,y) = x_1y_1 + 4x_1y_2 + 4x_2y_1 + 10x_2y_2$ PRO $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$
  - PROČ UVAŽUJEME JEN SYMETRICKÉ BILINEÁRNÍ FORMY?
    - „SYMETRIZACE" - INDUKUJE-LI b KVADRATICKOU FORMU f, PAK SYMETRICKÁ $b_s(u,v) := \frac{1}{2}(b(u,v) + b(v,u))$ TAKY INDUKUJE f
    - POKUD OVŠEM $\mathbb{T}$ NEMÁ CHARAKTERISTIKU 2! → TAM $\frac{1}{2}$ NEDÁVÁ SMYSL
      - NAPŘ. $f(u) = u_1u_2$ NAD $\mathbb{Z}_2$ NENÍ KVADRATICKOU FORMOU
  - PROTOŽE JE KAŽDÁ KVADRATICKÁ FORMA INDUKOVANÁ BILINEÁRNÍ FORMOU, DOSTÁVÁME ANALOGIE PŘEDEŠLÝCH VÝSLEDKŮ:
    - MATICE KVADRATICKÉ FORMY f VZHLEDEM K BÁZI B JE MATICÍ LIBOVOLNÉ SYMETRICKÉ BILINEÁRNÍ FORMY INDUKUJÍCÍ f
    - $f(u) = [u]_B^T A [u]_B$, KDE A JE MATICÍ f VZHLEDEM K B A $u \in V$
    - KAŽDÁ KVADRATICKÁ FORMA f NAD $\mathbb{T}^n$ SE DÁ VYJÁDŘIT VE TVARU $f(x) = x^T A x$ PRO NĚJAKOU SYMETRICKOU $A \in \mathbb{T}^{n \times n}$

- MATICE f VŮČI JINÉ BÁZI B' JE $S^T A S$, KDE $S := {}_B[id]_{B'}$, A ODPOVÍDÁ STEJNÉ BILINEÁRNÍ FORMĚ JAKO A

- PROTOŽE f JE INDUKOVANÁ SYMETRICKOU BILINEÁRNÍ FORMOU, JE JEJÍ MATICE SYMETRICKÁ A NAD $\mathbb{R}^n$ JI LZE DIAGONALIZOVAT

- VĚTA 13.5 (SYLVESTERŮV ZÁKON SETRVAČNOSTI):
  JE-LI $f(x) = x^T A x$ KVADRATICKOU FORMOU NA $\mathbb{R}^n$, PAK EXISTUJE BÁZE, VŮČI NÍŽ MÁ f DIAGONÁLNÍ MATICI S PRVKY $-1, 0, 1$. NAVÍC JE TATO MATICE AŽ NA POŘADÍ PRVKŮ JEDNOZNAČNÁ
  TZV. POLÁRNÍ BÁZE $\rightarrow$ EXISTUJE I PRO PROSTORY NAD LIBOVOLNÝM TĚLESEM CHARAKTERISTIKY $\neq 2$
  - NAPŘÍKLAD MATICI $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ FORMY NAD $\mathbb{Z}_2$ NELZE DIAGONALIZOVAT

$\Rightarrow$ „KLASIFIKACE" KVADRATICKÝCH PLOCH V $\mathbb{R}^2$ (VIZ PREZENTACE)