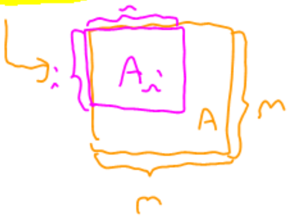
- Z MINULA:
- POZITIVNÍ (SEMI-)DEFINITNOST SE DÁ TESTOVAT ZA POMOCÍ DETERMINANTŮ (1)
- **VĚTA 11.6** (**SYLVESTEROVO KRITÉRIUM POZITIVNÍ DEFINITNOSTI**):

SYMETRICKÁ $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ JE POZITIVNĚ DEFINITNÍ $\Leftrightarrow$ DETERMINANTY VŠECH HLAVNÍCH **VEDOUCÍCH PODMATIC** $A_1, \dots, A_m$ JSOU KLADNÉ.



- PLATÍ I ANALOGIE PRO POZITIVNĚ SEMIDEFINITNÍ MATICE
  - NESTAČÍ ALE NEZÁPORNÉ DETERMINANTY HLAVNÍCH PODMATIC, VIZ MATICE $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, KTERÁ MÁ $\det(A_1) = \det(A_2) = 0$, ALE NENÍ POZITIVNĚ SEMIDEFINITNÍ, PROTOŽE $e_2^T A e_2 = -1 < 0$
- **VĚTA 12.1** (**SYLVESTEROVO KRITÉRIUM POZITIVNÍ SEMIDEFINITNOSTI**):

SYMETRICKÁ $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ JE POZITIVNĚ SEMIDEFINITNÍ $\Leftrightarrow$ DETERMINANTY VŠECH **HLAVNÍCH PODMATIC** JSOU NEZÁPORNÉ

↳ VZNIKNOU Z A ODSTRANĚNÍM URČITÉHO POČTU (I NULOVÉHO) ŘÁDKŮ A SLOUPCŮ SE STEJNÝMI INDEXY → NAPŘ: $\begin{pmatrix} 1 & \cancel{2} & 3 \\ \cancel{4} & \cancel{5} & \cancel{6} \\ 7 & \cancel{8} & 9 \end{pmatrix}$

- DK:
  - $i)$ $\Rightarrow$: ANALOGICKY JAKO V DŮKAZU VĚTY 11.6
  - $ii)$ $\Leftarrow$: INDUKCÍ PODLE m, PRO $m=1$ JE TVRZENÍ TRIVIÁLNÍ
    - NECHŤ $m \geq 2$ A NECHŤ TVRZENÍ PLATÍ PRO $m-1$
      - SPOREM - BUĎ $\lambda < 0$ VLASTNÍ ČÍSLO A x PŘÍSLUŠNÝ VLASTNÍ VEKTOR S $\|x\|_2 = 1$
    - JSOU-LI VŠECHNA OSTATNÍ ČÍSLA KLADNÁ, PAK $\det(A) < 0$ A JSME HOTOVI (A JE TAKÉ HLAVNÍ PODMATICÍ A)
    - JINAK $\exists$ VLASTNÍ ČÍSLO $\mu \leq 0$ S VLASTNÍM VEKTOREM y, KDE $\|y\|_2 = 1$ A $x \perp y$ → PODLE **VĚTY 9.3**
    - ZVOLME $\alpha \in \mathbb{R}$ TAKOVÉ, ABY $z := x + \alpha y$ MĚL NULOVOU i-TOU SLOŽKU (BÚNO i-TOU)

②

- POTOM PLATÍ:

$$z^T A z = (x+\alpha y)^T A (x+\alpha y) = (x+\alpha y)^T (\underbrace{Ax}_{=\lambda x} + \alpha \underbrace{Ay}_{=\mu y}) =$$

$$= (x+\alpha y)^T(\lambda x + \alpha \mu y) = \lambda \underbrace{x^T x}_{=1} + \alpha^2 \mu \underbrace{y^T y}_{=1} =$$

$$= \lambda + \alpha^2 \mu < 0$$

↳ $\lambda < 0,\ \mu \leq 0$ $\quad x \perp y$

- POKUD TEDY A' VZNIKNE Z A ODSTRANĚNÍM i-TÉHO ŘÁDKU A SLOUPCE A z' VZNIKNE ZE z ODSTRANĚNÍM i-TÉ SLOŽKY, PAK $z'^T A' z' = z^T A z < 0$

$\Rightarrow$ HLAVNÍ PODMATICE A' NENÍ POZITIVNĚ SEMIDEFINITNÍ A PODLE IP $\exists$ HLAVNÍ PODMATICE A' (A TEDY I A), KTERÁ NEMÁ NEZÁPORNÝ DETERMINANT $\Rightarrow$ SPOR $\boxtimes$

- POTŘEBUJEME SPOČÍTAT AŽ $2^n - 1$ DETERMINANTŮ $\Rightarrow$ NEPRAKTICKÉ

- MÁME ALE I NÁSLEDUJÍCÍ (NEJDŮLEŽITĚJŠÍ) METODU NA TESTOVÁNÍ POZITIVNÍ (SEMI-)DEFINITNOSTI

- VĚTA 12.2 (CHOLESKÉHO ROZKLAD): PRO KAŽDOU POZITIVNĚ DEFINITNÍ MATICI $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ EXISTUJE JEDINÁ DOLNÍ TROJÚHELNÍKOVÁ MATICE $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ S KLADNOU DIAGONÁLOU TAKOVÁ, ŽE $A = LL^T$.

- DK:
  - INDUKCÍ PODLE n
  - PRO $n=1$ MÁME $A = (A_{11})$ A $L := (\sqrt{A_{11}})$
  - NECHŤ TVRZENÍ PLATÍ PRO $n-1$
  - NECHŤ TEDY $n \geq 2$ A
  - OZNAČME $A = \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ a & \bar{A} \end{pmatrix}$, KDE $\alpha \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^{n-1}$ A $\bar{A} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$
  - PODLE VĚTY 11.4 JE PAK $\alpha > 0$ A $\bar{A} - \frac{a a^T}{\alpha}$ JE POZITIVNĚ DEFINITNÍ

    ↳ PROTOŽE A JE POZITIVNĚ DEFINITNÍ

$\Rightarrow$ PODLE IP EXISTUJE JEDINÁ DOLNÍ TROJÚHELNÍKOVÁ $\bar{L} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ S KLADNOU DIAGONÁLOU TAKOVÁ, ŽE $\bar{A} - \frac{a a^T}{\alpha} = \bar{L} \cdot \bar{L}^T$

- POLOŽME $L = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha} & o^T \\ \frac{a}{\sqrt{\alpha}} & \bar{L} \end{pmatrix}$

- POTOM $LL^T = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha} & o^T \\ \frac{a}{\sqrt{\alpha}} & \bar{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha} & \frac{a^T}{\sqrt{\alpha}} \\ o & \bar{L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ a & \frac{aa^T}{\alpha} + \bar{L}\bar{L}^T \end{pmatrix} = A$

- JEDNOZNAČNOST - MĚJME ROZKLAD $A = L' \cdot L'^T$, CHCEME $L' = L$
  - OZNAČME $L' = \begin{pmatrix} \beta & o^T \\ b & \bar{L}' \end{pmatrix}$ MUSÍ ZDE BÝT NULY, L' JE TOTIŽ DOLNÍ TROJÚHELNÍKOVÁ
  - POTOM $\begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ a & \bar{A} \end{pmatrix} = A = L' \cdot L'^T = \begin{pmatrix} \beta^2 & \beta b^T \\ \beta b & bb^T + \bar{L}' \cdot \bar{L}'^T \end{pmatrix}$

  $\Rightarrow \beta = \sqrt{\alpha},\ b = \frac{a}{\sqrt{\alpha}},\ \bar{A} = bb^T + \bar{L}' \cdot \bar{L}'^T$

  $\Rightarrow \bar{L}' \cdot \bar{L}'^T = \bar{A} - \frac{aa^T}{\alpha}$

  - Z JEDNOZNAČNOSTI $\bar{L}$ JE ALE $\bar{L}' = \bar{L}$ A $\underline{\underline{L' = L}}$ $\boxtimes$

- CHOLESKÉHO ROZKLAD FUNGUJE I PRO POZITIVNĚ SEMIDEFINITNÍ MATICE, JEN NA DIAGONÁLE L BUDOU NEZÁPORNÁ ČÍSLA A L UŽ NEBUDE JEDNOZNAČNĚ URČENÁ

- PŘÍKLAD:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 50 \end{pmatrix}}_{=A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}}_{=L} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}}_{=L^T} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}}_{=L'} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}}_{=L'^T}$$

- CHOLESKÉHO ROZKLAD LZE KONSTRUKTIVNĚ SESTROJIT
  - VYJÍT Z ROVNICE $A = LL^T$ A NA OBOU STRANÁCH ROVNICE POSTUPNĚ POROVNÁVAT SHORA PRVKY V 1-, 2-, 3-, ..., m-TÉM SLOUPCI
  - MÁME-LI SPOČÍTANÉ SLOUPCE $1, \dots, k-1$ MATICE L, PAK PLATÍ

$$A_{kk} \underset{Z\ A = LL^T}{=} \sum_{j=1}^{n} L_{kj} \cdot (L^T)_{jk} \underset{(L^T)_{jk} = L_{kj}}{=} \sum_{j=1}^{m} (L_{kj})^2 \underset{L \text{ JE DOLNÍ TROJÚHELNÍKOVÁ}}{=} \sum_{j=1}^{k} (L_{kj})^2$$

$\Rightarrow$ SPOČÍTÁME $L_{kk} = \sqrt{\underbrace{A_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} (L_{kj})^2}_{>0 \text{ JE-LI } A \text{ POZITIVNĚ DEFINITNÍ}}}$

– Máme-li nyní určené $L_{k,k}, \dots, L_{i-1,k}$ pro pro $i > k$, pak

platí $A_{ik} = \sum_{j=1}^{n} L_{ij} (L^T)_{jk} = \sum_{j=1}^{n} L_{ij} L_{kj} = \sum_{j=1}^{k} L_{ij} L_{kj}$

$A = LL^T$ $\quad$ $(L^T)_{jk} = L_{kj}$ $\quad$ L je dolní trojúhelníková

a spočítáme

$$L_{ik} = \frac{1}{L_{kk}} \left(A_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} L_{ij} \cdot L_{kj} \right)$$

– Algoritmus (Choleského rozklad):

Vstup: symetrická $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Výstup: $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ z věty 12.2 nebo informace, že A není pozitivně definitní

1) $L := 0_n$
2) pro $k = 1, \dots, n$ do: // určí L_{*k}
3) pokud $A_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} L_{kj}^2 \leq 0$, vrať „A není poz. definitní"
4) $L_{kk} := \sqrt{A_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} L_{kj}^2}$
5) pro $i = k+1, \dots, n$ do: // určí prvky pod L_{kk}
6) $L_{ik} := \frac{1}{L_{kk}} \cdot \left(A_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} L_{ij} \cdot L_{kj} \right)$

– Potřebuje $\sim \frac{n^3}{3}$ operací a z uvedených metod je nejrychlejší

– Jako aplikaci pozitivně definitních matic uvedeme popis všech skalárních součinů v $\mathbb{R}^n$

– Věta 12.3: Operace $\langle x, y \rangle$ je skalární součin v $\mathbb{R}^n$ $\Leftrightarrow$ $\langle x, y \rangle = x^T A y$ pro nějakou pozitivně definitní matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

– Indukovaná norma pak je $\|x\| = \sqrt{x^T A x}$

– Pro $A = I_n$ dostáváme standardní skalární součin a eukleidovskou normu

DK:

i) $\Rightarrow$: POLOŽME $A := (A_{ij})_{i,j=1}^{n}$, KDE $A_{ij} := \langle e_i, e_j \rangle$

$\Rightarrow$ A JE SYMETRICKÁ (Z $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$)

– MÁME TAKÉ:

$$\langle x, y \rangle = \langle \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i e_i}_{=x}, \underbrace{\sum_{j=1}^{n} y_j e_j}_{=y} \rangle \underset{\text{LINEARITA V 1. SLOŽCE}}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i \langle e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \rangle =$$

$$\underset{\text{LINEARITA VE 2. SLOŽCE}}{=} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \langle e_i, e_j \rangle \underset{\text{VOLBA } A}{=} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j A_{ij} = \underline{\underline{x^T A y}}$$

$\Rightarrow$ A JE POZITIVNĚ DEFINITNÍ (PLATÍ $\forall x \in \mathbb{R}^n$: $x^T A x = \langle x, x \rangle \geq 0$ A $x^T A x = 0 \Rightarrow x = 0$)

ii) $\Leftarrow$:

– JE-LI A POZITIVNĚ DEFINITNÍ, PAK $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$:

1) $\langle x, x \rangle = x^T A x \geq 0$ A $\langle x, x \rangle = x^T A x = 0$ POUZE PRO $x = 0$

2) $\langle x + y, z \rangle = (x+y)^T A z = x^T A z + y^T A z = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

3) $\langle \alpha x, y \rangle = (\alpha x)^T A y = \alpha x^T A y = \alpha \langle x, y \rangle$

4) $\langle x, y \rangle = x^T A y = (x^T A y)^T \underset{A^T = A}{=} y^T A x = \langle y, x \rangle$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{\langle x, y \rangle \text{ JE SKALÁRNÍ SOUČIN}}}$ $\boxtimes$