POZITIVNĚ (SEMI-)DEFINITNÍ MATICE:

- ANALOGIE NEZÁPORNÝCH/KLADNÝCH ČÍSEL PRO MATICE, DŮLEŽITÉ V OPTIMALIZACI A DALŠÍCH OBORECH

- SYMETRICKÁ MATICE $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ JE **POZITIVNĚ SEMIDEFINITNÍ**, POKUD $x^T A x \geq 0$ PRO VŠECHNA $x \in \mathbb{R}^n$
- A JE **POZITIVNĚ DEFINITNÍ**, POKUD $x^T A x > 0$ PRO VŠECHNA $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
  - STAČÍ TESTOVAT PRO $x \in \mathbb{R}^n$ S $\|x\|_2 = 1$
  - S OPAČNÝMI NEROVNOSTMI LZE ZAVÉST I NEGATIVNÍ (SEMI-)DEFINITNÍ MATICE
  - LZE ZAVÉST I PRO NESYMETRICKÉ MATICE, ALE TY LZE ZESYMETRIZOVAT ÚPRAVOU $\frac{1}{2}(A+A^T)$, PROTOŽE $x^T \frac{1}{2}(A+A^T)x = x^T A x$

- PŘÍKLADY:
  - POZITIVNĚ SEMIDEFINITNÍ MATICE - 0_n
  - POZITIVNĚ DEFINITNÍ MATICE - I_n, $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
  - $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ NENÍ POZITIVNĚ SEMIDEFINITNÍ, PROTOŽE $(-1,1)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -2$
- POZITIVNÍ SEMIDEFINITNOST MATICE A SE ZNAČÍ $A \succeq 0$
  - $A \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ JE POZITIVNĚ SEMIDEFINITNÍ $\Leftrightarrow$ A JE NEZÁPORNÉ
- **TVRZENÍ 11.1** (VLASTNOSTI POZITIVNĚ DEFINITNÍCH MATIC): NECHŤ $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ JSOU POZITIVNĚ DEFINITNÍ MATICE A $\alpha > 0$. PAK
  1) $A + B$ JE POZITIVNĚ DEFINITNÍ,
  2) αA JE POZITIVNĚ DEFINITNÍ,
  3) A JE REGULÁRNÍ A A^{-1} JE POZITIVNĚ DEFINITNÍ.
- DK:
  - 1) A 2) JSOU TRIVIÁLNÍ
  - 3) REGULARITA – SPLŇUJE-LI $x \in \mathbb{R}^n$ ROVNOST $Ax = 0$, PAK $x^T A x = x^T 0 = 0$, A PROTOŽE A JE POZITIVNĚ DEFINITNÍ, TAK $x = 0 \Rightarrow A$ JE REGULÁRNÍ
    - INVERZNÍ MATICE – SPOREM – $\exists\, x \neq 0 : x^T A^{-1} x \leq 0$. PAK

$$x^T A^{-1} x = x^T A^{-1} A A^{-1} x = y^T A y \leq 0 \Rightarrow \text{SPOR}$$

$y = A^{-1}x \neq 0$

↳ A MÁ BÝT POZITIVNĚ DEFINITNÍ

$\boxtimes$

- ANALOGIE TVRZENÍ 11.1 (1-2) PLATÍ PRO POZITIVNĚ SEMIDEFINITNÍ MATICE (2) PRO $\alpha \geq 0$, 3) OBECNĚ NEPLATÍ)

- **VĚTA 11.2** (CHARAKTERIZACE POZITIVNÍ DEFINITNOSTI): PRO SYMETRICKOU $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ JSOU NÁSLEDUJÍCÍ TVRZENÍ EKVIVALENTNÍ:
  1) A JE POZITIVNĚ DEFINITNÍ,
  2) VLASTNÍ ČÍSLA A JSOU KLADNÁ,
  3) $\exists\, U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ TAKOVÁ, ŽE $\mathrm{RANK}(U) = n$ A $A = U^T U$.

„ODMOCNINA MATICE"

- <u>DK:</u>
  1) $\Rightarrow$ 2): SPOREM - NECHŤ $\exists$ VLASTNÍ ČÍSLO $\lambda \leq 0$ S PŘÍSLUŠNÝM VLASTNÍM VEKTOREM x, KDE $\|x\|_2 = 1$ A MÁ BÝT POZITIVNĚ DEFINITNÍ
  - POTOM $Ax = \lambda x \Rightarrow x^T A x = \lambda x^T x = \lambda \leq 0 \Rightarrow$ <u>SPOR</u>

  VĚTA 9.3

  2) $\Rightarrow$ 3):
  - $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ JE SYMETRICKÁ $\Rightarrow A = Q \cdot \Lambda \cdot Q^T$, KDE $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ JE REGULÁRNÍ A Λ JE DIAGONÁLNÍ MATICE S PRVKY $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$

    VLASTNÍ ČÍSLA A JSOU KLADNÁ
  - BUĎ $\Lambda' := \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$ A $U := \Lambda' Q^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$
  - PAK MÁME $U^T U = Q \cdot \Lambda' \cdot \Lambda' \cdot Q^T = Q \Lambda Q^T = A$

    VOLBA U, $\Lambda'^2 = \Lambda$, SPEKTRÁLNÍ ROZKLAD

  PROTOŽE Q JE ORTOGONÁLNÍ, TAK FUNGUJE I $U := Q \Lambda' Q^T \Rightarrow A = U^2$
  - TAKÉ $\mathrm{RANK}(U) = n$, NEBOLI U JE REGULÁRNÍ, PROTOŽE U JE SOUČINEM REGULÁRNÍCH MATIC Q A Λ'

  3) $\Rightarrow$ 1):
  - SPOREM - $\exists\, x \neq 0 : x^T A x \leq 0$. PAK $0 \geq x^T A x = x^T U^T U x = (Ux)^T Ux = \langle Ux, Ux \rangle = \|Ux\|^2 \Rightarrow Ux = 0$, ALE $\mathrm{RANK}(U) = n \Rightarrow x = 0 \Rightarrow$ <u>SPOR</u> ⊠

- ANALOGIE VĚTY 11.2 PRO POZITIVNĚ SEMIDEFINITNÍ MATICE:

- **VĚTA 11.3** (CHARAKTERIZACE POZITIVNÍ SEMIDEFINITNOSTI): PRO SYMETRICKOU $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ JSOU NÁSLEDUJÍCÍ TVRZENÍ EKVIVALENTNÍ:
  1) A JE POZITIVNĚ SEMIDEFINITNÍ,
  2) VLASTNÍ ČÍSLA A JSOU NEZÁPORNÁ,
  3) $\exists\, U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ TAKOVÁ, ŽE $A = U^T U$.

  - DŮKAZ JE ANALOGICKÝ

- **TESTOVÁNÍ POZITIVNÍ DEFINITNOSTI**:
  - DÁ SE TESTOVAT EFEKTIVNĚ. ZÁKLADEM JE NÁSLEDUJÍCÍ REKURENCE
  - **VĚTA 11.4** (REKURENTNÍ VZOREČEK):

    MĚJME SYMETRICKOU $A = \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ a & \bar{A} \end{pmatrix}$, KDE $\alpha \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\bar{A} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$

    PAK A JE POZITIVNĚ DEFINITNÍ $\Leftrightarrow$ $\alpha > 0$ A $\bar{A} - \frac{aa^T}{\alpha}$ JE POZITIVNĚ DEFINITNÍ

    - NELZE POUŽÍT PRO POZITIVNĚ SEMIDEFINITNÍ MATICE, PROTOŽE α MŮŽE BÝT NULOVÉ

  - DŮK:

    POUŽÍVÁME $x^TAx > 0$ PRO $x = e_1$

    i) $\Rightarrow$: A JE POZITIVNĚ DEFINITNÍ $\Rightarrow$ $\alpha = e_1^T A e_1 > 0$ $\Rightarrow$ $\underline{\alpha > 0}$

    - PRO $\bar{x} \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ PLATÍ

    $$\bar{x}^T\left(\bar{A} - \frac{aa^T}{\alpha}\right)\bar{x} = \bar{x}^T\bar{A}\bar{x} - \frac{(a^T\bar{x})^2}{\alpha} = \left(-\frac{a^T\bar{x}}{\alpha}, \bar{x}^T\right)\begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ a & \bar{A} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{a^T\bar{x}}{\alpha} \\ \bar{x} \end{pmatrix} > 0$$

    $A = \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ a & \bar{A} \end{pmatrix}$ JE POZITIVNĚ DEFINITNÍ

    $\Rightarrow$ $\underline{\bar{A} - \frac{aa^T}{\alpha} \text{ JE POZITIVNĚ DEFINITNÍ}}$

    ii) $\Leftarrow$: MĚJME $x = \begin{pmatrix} \beta \\ \bar{x} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. POTOM PLATÍ

    $$x^TAx = (\beta, \bar{x}^T)\begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ a & \bar{A} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta \\ \bar{x} \end{pmatrix} = \alpha\beta^2 + 2\beta a^T\bar{x} + \bar{x}^T\bar{A}\bar{x} =$$

    $$= \underbrace{\bar{x}^T\left(\bar{A} - \frac{aa^T}{\alpha}\right)\bar{x}}_{\geq 0\text{, PROTOŽE } \bar{A} - \frac{aa^T}{\alpha} \text{ JE POZITIVNĚ DEFINITNÍ}} + \underbrace{\left(\sqrt{\alpha}\beta + \frac{a^T\bar{x}}{\sqrt{\alpha}}\right)^2}_{\geq 0 \text{ (2. MOCNINA)}} \geq 0$$

    - ROVNOST NASTÁVÁ $\Leftrightarrow$ $\bar{x} = o$ A $\beta = 0$ $\Rightarrow$ $\underline{\text{A JE POZITIVNĚ DEFINITNÍ}}$ $\boxtimes$

  - MATICE $\bar{A} - \frac{aa^T}{\alpha}$ ODPOVÍDÁ DOLNÍMU BLOKU PO ELIMINACI 1. SLOUPCE V GAUSSOVĚ ELIMINACI $\Rightarrow$ POZ. DEFINITNOST LZE TESTOVAT GAUSSOVOU ELIMINACÍ

- **TVRZENÍ 11.5**:
  - SYMETRICKÁ $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ JE POZITIVNĚ DEFINITNÍ $\Leftrightarrow$ GAUSSOVA ELIMINACE PŘEVEDE A DO ODSTUPŇOVANÉHO TVARU S KLADNOU DIAGONÁLOU ZA POMOCI POUZE PŘIČTENÍ NÁSOBKU ŘÁDKU S PIVOTEM K JINÉMU ŘÁDKU POD NÍM
    - BEZ DŮKAZU ($\Rightarrow$ PLYNE Z **VĚTY 11.4**, $\Leftarrow$ INDUKCE)

- POZITIVNÍ (SEMI-)DEFINITNOST SE DÁ TESTOVAT ZA POMOCÍ DETERMINANTŮ

- **VĚTA 11.6** (**SYLVESTEROVO KRITÉRIUM POZITIVNÍ DEFINITNOSTI**):

  SYMETRICKÁ $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ JE POZITIVNĚ DEFINITNÍ $\iff$ DETERMINANTY VŠECH HLAVNÍCH **VEDOUCÍCH PODMATIC** $A_1, \dots, A_n$ JSOU KLADNÉ.

- DK:

  i) $\Rightarrow$:

  JE-LI A POZITIVNĚ DEFINITNÍ, PAK JE POZITIVNĚ DEFINITNÍ I KAŽDÉ A_i

  - PROTOŽE POKUD $\exists i : \exists x \neq o : x^T A_i x \leq 0$, PAK $(x^T, o^T) A \binom{x}{o} \leq 0$

  - **VĚTA 11.2** $\Rightarrow$ A_i MÁ KLADNÁ VLASTNÍ ČÍSLA $\Rightarrow$ $\det(A_i) > 0$

    $\det(A_i)$ = SOUČIN VLASTNÍCH ČÍSEL A_i PODLE **TVRZENÍ 7.2**

  ii) $\Leftarrow$:

  - BĚHEM GAUSSOVY ELIMINACE A JSOU VŠECHNY PIVOTY KLADNÉ

    - JE-LI TOTIŽ i-TÝ PIVOT PRVNÍM NEKLADNÝM, PAK $\det(A_i) \leq 0$

  - PODLE **TVRZENÍ 11.5** JE TEDY A POZITIVNĚ DEFINITNÍ ⊠