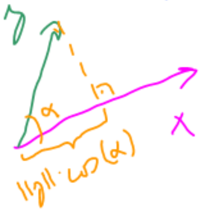
SKALÁRNÍ SOUČIN:

- JAK MEZI SEBOU NÁSOBIT VEKTORY?
  - DÁ NÁM POJEM KOLMOSTI, VZDÁLENOSTI A VELIKOSTI VEKTORŮ
    - KOLMOSTI → ORTOGONALITA, VZDÁLENOSTI → METRIKA, VELIKOSTI VEKTORŮ → NORMA



- MOTIVACE:
  - STANDARDNÍ SKALÁRNÍ SOUČIN VEKTORŮ $x, y \in \mathbb{R}^m$: $x^T y = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i$
  - EUKLEIDOVSKÁ NORMA VEKTORU $x \in \mathbb{R}^m$ JE $\|x\| = \sqrt{x^T x} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_i^2}$
  - PAK $x^T y = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos(\alpha)$

- OBECNĚ SKALÁRNÍ SOUČIN ZAVEDENE AXIOMATICKY
  ↳ JAKO TĚLESA, GRUPY, ...

- JE-LI V VEKTOROVÝ PROSTOR NAD $\mathbb{R}$, PAK SKALÁRNÍ SOUČIN NAD $\mathbb{R}$ JE ZOBRAZENÍ $\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ SPLŇUJÍCÍ PRO VŠECHNA $x, y, z \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$:
  1) $\langle x, x \rangle \geq 0$ A ROVNOST NASTANE POUZE PRO $x = o$,
  2) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$,
  3) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$,
  4) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

- 2) A 3) $\Rightarrow$ $\langle \cdot , \cdot \rangle$ JE LINEÁRNÍ V 1. SLOŽCE. PODLE 4) JE PAK LINEÁRNÍ I V 2. SLOŽCE
- TEDY $\forall x, y, z \in V\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle$
- 3) PRO $\alpha = 0 \Rightarrow \langle x, o \rangle = 0 = \langle o, x \rangle$

- SKALÁRNÍ SOUČIN NAD $\mathbb{C}$ JE DEFINOVANÝ ANALOGICKY, JEN 4) SE ZMĚNÍ NA: $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ ↳ KOMPLEXNĚ SDRUŽENÉ ČÍSLO, TEDY $\overline{a + bi} = a - bi$
  - POTOM SOUČIN NENÍ LINEÁRNÍ VE 2. SLOŽCE, PROTOŽE PLATÍ:
    $$\langle x, \alpha y \rangle = \overline{\langle \alpha y, x \rangle} = \bar{\alpha} \overline{\langle y, x \rangle} = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle$$

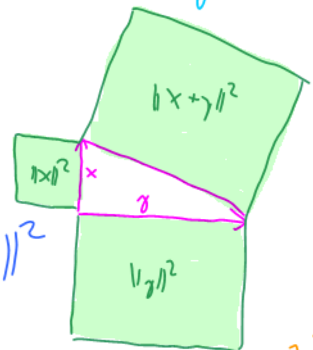
NUTNÉ, JINAK PRO $x \in \mathbb{R}^x$ JE
$0 < \langle ix, ix \rangle = i \langle x, ix \rangle = i \langle ix, x \rangle = i^2 \langle x, x \rangle < 0$

- PŘÍKLADY STANDARDNÍCH SKALÁRNÍCH SOUČINŮ:
  - V $\mathbb{R}^m$: $\langle x, y \rangle = x^T y = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i$
  - V $\mathbb{C}^m$: $\langle x, y \rangle = x^T \bar{y} = \sum_{i=1}^{m} x_i \bar{y}_i$
  - V $\mathbb{R}^{m \times n}$: $\langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} B_{ij}$
  - V $C_{[a,b]}$: $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x)\, dx$

- SKALÁRNÍ SOUČIN JE JEDNOZNAČNĚ URČEN SOUČINY DVOJIC BÁZICKÝCH VEKTORŮ: → PODOBNĚ JAKO JE LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ URČENÉ OBRAZY BÁZE
  - JE-LI $B = \{z_1, \dots, z_n\}$ BÁZE V NAD $\mathbb{R}$ A $x, y \in V$, KDE $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i$ A $y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i z_i$, PAK:

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j z_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j \langle z_i, z_j \rangle$$

- NA ZÁKLADĚ SKALÁRNÍHO SOUČINU LZE ZAVÉST POJEM $\underbrace{\text{VELIKOSTI VEKTORU}}_{\text{NORMA}}$
- NORMA INDUKOVANÁ SKALÁRNÍM SOUČINEM JE $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, KDE $x \in V$
- VEKTORY $x, y \in V$ JSOU KOLMÉ, POKUD $\langle x, y \rangle = 0$. ZNAČÍME $x \perp y$.
  ↳ NEBOLI ORTOGONÁLNÍ
- PŘÍKLADY KOLMÝCH VEKTORŮ VE STANDARDNÍCH SKALÁRNÍCH SOUČINECH:
  - V $\mathbb{R}^3$: $(1,2,3)^T \perp (1,1,-1)^T$
  - V $\mathbb{R}^n$: i-TÝ ŘÁDEK A S j-TÝM SLOUPCEM A^{-1} PRO $i \neq j$
  - V $C_{[-\pi, \pi]}$: $\sin(x) \perp \cos(x) \perp 1$



- VĚTA 1.1 (PYTHAGOROVA VĚTA):
  $x, y \in V$ JSOU KOLMÉ $\Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$
  NAD $\mathbb{R}$ PLATÍ $\Leftrightarrow$, NAD $\mathbb{C}$ NE (VIZ 1.1 A i V $\mathbb{C}^1$)
- DŮKAZ:

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + \underbrace{\langle x, y \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle y, x \rangle}_{=0} + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

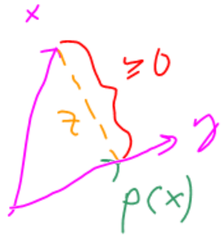
Z KOLMOSTI x, y $\boxtimes$

- PROTOŽE $\|x+y\|^2 \overset{\text{NAD } \mathbb{R}}{=} \langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle$,
  TAK $\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$ - POLARIZAČNÍ IDENTITA
  - ČILI $\langle x, y \rangle$ LZE VYPOČÍTAT ZE ZNALOSTI $\|x\|$, $\|y\|$ A $\|x+y\|$

– **VĚTA 1.2** (**CAUCHYHO-SCHWARTZOVA NEROVNOST**):

PRO KAŽDÉ $x, y \in V$ PLATÍ $|\langle x, y\rangle| \le \|x\| \cdot \|y\|$

– VZDÁLENOST x OD JEHO PROJEKCE NA $\mathrm{SPAN}\{y\}$ JE ≥ 0



– DŮKAZ:

– PRO $y = o$ PLATÍ TRIVIÁLNĚ. NECHŤ $y \neq o$, BÚNO $\|y\| = 1$.

– TEDY CHCEME UKÁZAT $|\langle x, y\rangle| \le \|x\|$

↳ JINAK JEN PŘENÁSOBÍME KLADNÝM ČÍSLEM $\frac{1}{\|y\|}$

– DEFINUJME $\alpha := \langle x, y\rangle$ A $z := x - \alpha y$,

↳ VEKTOR KOLMÝ NA y

– POTOM MÁME

VOLBA z

$$0 \le \langle z, z\rangle = \langle x - \alpha y, x - \alpha y\rangle =$$

$$= \langle x, x\rangle - \bar{\alpha} \underbrace{\langle x, y\rangle}_{=\alpha} - \alpha \underbrace{\langle y, x\rangle}_{=\bar{\alpha}} + \alpha\bar{\alpha} \underbrace{\langle y, y\rangle}_{=1} =$$

VLASTNOSTI $\langle \cdot, \cdot \rangle$

$$= \langle x, x\rangle - \bar{\alpha}\alpha - \alpha\bar{\alpha} + \alpha\bar{\alpha} = \langle x, x\rangle - |\alpha|^2$$

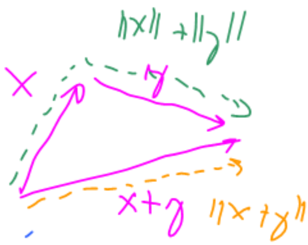
$\alpha\bar{\alpha} = |\alpha|^2$

– TEDY $|\alpha|^2 \le \langle x, x\rangle$ A UMOCNĚNÍM

MÁME $\underline{\underline{|\langle x, y\rangle| \le \|x\|}}$ ⊠

– **DŮSLEDEK 1.3** (**TROJÚHELNÍKOVÁ NEROVNOST**):

PRO KAŽDÉ $x, y \in V$ PLATÍ $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$



– DŮKAZ:

– PŘIPOMEŇME, ŽE PRO KAŽDÉ $z = a + ib \in \mathbb{C}$ PLATÍ

$z + \bar{z} = 2a = 2\mathrm{Re}(z)$ A $\mathrm{Re}(z) \le |z|$

– ODVOĎME

DEFINICE $\|\cdot\|$ VLASTNOSTI $\langle \cdot, \cdot \rangle$

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle =$$

$z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z)$

$$= \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + 2\mathrm{Re}(\langle x, y\rangle) \le$$

PRO $z = \langle x, y\rangle$, $\mathrm{Re}(z) \le |z|$

$$\le \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + 2|\langle x, y\rangle| \le$$

VĚTA 1.2

$$\le \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| =$$

$$= (\|x\| + \|y\|)^2$$

– UMOCNĚNÍM PAK MÁME $\underline{\underline{\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|}}$ ⊠

- **Norma obecně:**
  - Normu lze definovat obecněji, ne jen na základě skalárního součinu
  - Je-li V vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$, pak **norma** je zobrazení $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ splňující
    1) $\|x\| \geq 0$ pro každé $x \in V$ a rovnost nastane pouze pro $x = 0$,
    2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$ pro každé $x \in V$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ (respektive $\alpha \in \mathbb{C}$),
    3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pro každé $x, y \in V$.

  - Norma indukovaná skalárním součinem je normou, protože z definice splňuje 1), 3) platí podle **důsledku 1.3** a 2) platí, protože

$$\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x \rangle} = \sqrt{\alpha \bar{\alpha} \langle x, x \rangle} = \sqrt{\alpha \bar{\alpha}} \cdot \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\alpha| \cdot \|x\|.$$

  - Příklady norem v $\mathbb{R}^n$:
    - **p-norma** $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$
      - $p = 1 \Rightarrow$ součtová norma
      - $p = 2 \Rightarrow$ eukleidovská norma
      - $p = \infty \Rightarrow$ maximová norma

      Nejsou indukované žádným skalárním součinem

- **Metrika:**
  - Norma umožňuje zavést vzdálenost mezi vektory x, y jako $\|x - y\|$
  - **Metrika** na množině M (nemusí být vektorovým prostorem) je zobrazení $d : M \times M \to \mathbb{R}$ splňující
    1) $d(x, y) \geq 0$ pro všechna $x, y \in M$ a rovnost nastane pouze pro $x = y$
    2) $d(x, y) = d(y, x)$ pro všechna $x, y \in M$
    3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ pro všechna $x, y, z \in M$

  - Příklady metrik:
    - Každá norma $\|\cdot\|$ určuje metriku předpisem $d(x, y) := \|x - y\|$
    - $d(x, y) := \lceil \|x - y\|_2 \rceil$
    - $d(x, y) := 1$ pro $x \neq y$ a $d(x, x) = 0$

      Nejsou indukované normou
    - Počet pozic, na kterých se liší slova délky n