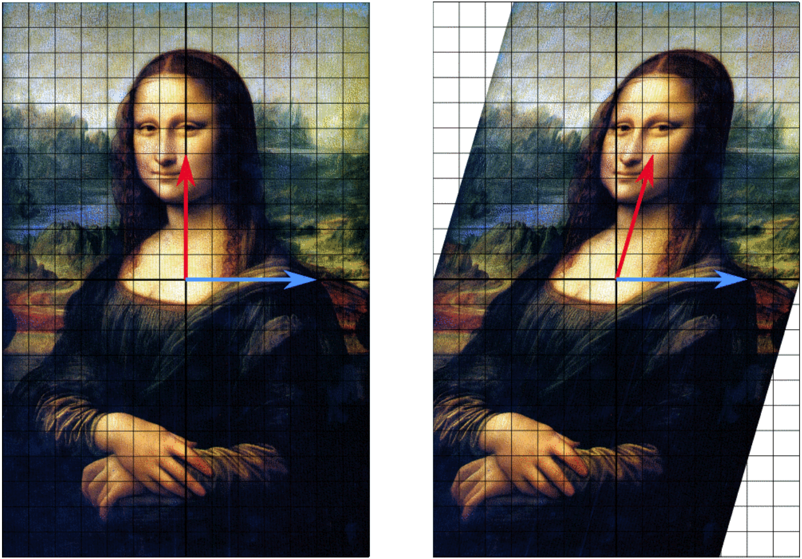
Lineární algebra 2

Martin Balko

9. přednáška

11. dubna 2022

Vlastní čísla



Zdroj: https://en.wikipedia.org

Jordanova normální forma: příklad

Jordanova normální forma: příklad

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{7} \end{pmatrix}$$

Jordanova normální forma: příklad

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{7} \end{pmatrix}$$

- Obě matice A i B mají vlastní čísla $5, 5, 7, 7, 7$.

Jordanova normální forma: příklad

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{7} \end{pmatrix}$$

- Obě matice A i B mají vlastní čísla $5, 5, 7, 7, 7$.
- Matice A má Jordanovy buňky $J_1(5), J_1(5), J_3(7)$.

Jordanova normální forma: příklad

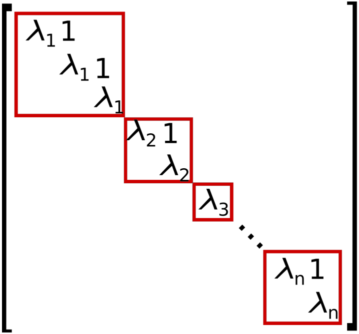
$$A = \begin{pmatrix} \boxed{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{7} \end{pmatrix}$$

- Obě matice A i B mají vlastní čísla $5, 5, 7, 7, 7$.
- Matice A má Jordanovy buňky $J_1(5), J_1(5), J_3(7)$.
- Matice B má Jordanovy buňky $J_2(5), J_2(7), J_1(7)$.

Jordanova normální forma

Jordanova normální forma

- Každá matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je podobná matici v Jordanově normální formě, která je až na pořadí buněk určena jednoznačně.

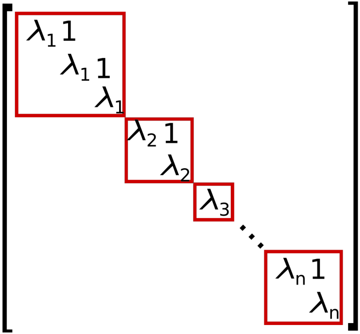


Obrázek: Marie Ennemond Camille Jordan (1838–1922).

Zdroje: https://www.geni.com/ a http://en.wikipedia.org

Jordanova normální forma

- Každá matice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je podobná matici v Jordanově normální formě, která je až na pořadí buněk určena jednoznačně.



Obrázek: Marie Ennemond Camille Jordan (1838–1922).

Zdroje: https://www.geni.com/ a http://en.wikipedia.org

- Větu o normální formě zformuloval Camille Jordan v roce 1870.

Spektrální rozklad symetrické matice: příklad

Spektrální rozklad symetrické matice: příklad

- Matice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
má vlastní čísla $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ a $\lambda_3 = 3$ s příslušnými vlastními vektory $v_1 = (1, -1, 0)^\top$, $v_2 = (0, 1, -1)^\top$ a $v_3 = (1, 1, 1)^\top$.

Spektrální rozklad symetrické matice: příklad

- Matice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
má vlastní čísla $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ a $\lambda_3 = 3$ s příslušnými vlastními vektory $v_1 = (1, -1, 0)^\top$, $v_2 = (0, 1, -1)^\top$ a $v_3 = (1, 1, 1)^\top$.
- Spektrálním rozkladem A je $A = S\Lambda S^{-1}$, kde
$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Spektrální rozklad symetrické matice: příklad

- Matice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
má vlastní čísla $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ a $\lambda_3 = 3$ s příslušnými vlastními vektory $v_1 = (1, -1, 0)^\top$, $v_2 = (0, 1, -1)^\top$ a $v_3 = (1, 1, 1)^\top$.
- Spektrálním rozkladem A je $A = S\Lambda S^{-1}$, kde
$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
- Je třeba zortogonalizovat a znormovat Gramovou–Schmidtovou ortogonalizací vlastní vektory odpovídající stejnému vlastnímu číslu.

Spektrální rozklad symetrické matice: příklad

- Matice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
má vlastní čísla $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ a $\lambda_3 = 3$ s příslušnými vlastními vektory $v_1 = (1, -1, 0)^\top$, $v_2 = (0, 1, -1)^\top$ a $v_3 = (1, 1, 1)^\top$.
- Spektrálním rozkladem A je $A = S\Lambda S^{-1}$, kde
$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
- Je třeba zortogonalizovat a znormovat Gramovou–Schmidtovou ortogonalizací vlastní vektory odpovídající stejnému vlastnímu číslu.
- Dostaneme spektrální rozklad $A = Q\Lambda Q^\top$, kde Q je ortogonální matice
$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{-\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}.$$

Mocninná metoda: příklad

Mocninná metoda: příklad

- Matice
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$
má vlastní čísla $\lambda_1 = 7$ a $\lambda_2 = \lambda_3 = -2$ s příslušnými vlastními vektory $v_1 = (1, 1, \frac{1}{2})^\top$, $v_2 = (-1, 0, 2)^\top$ a $v_3 = (-1, 1, 0)^\top$.

Mocninná metoda: příklad

- Matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

má vlastní čísla $\lambda_1 = 7$ a $\lambda_2 = \lambda_3 = -2$ s příslušnými vlastními vektory $v_1 = (1, 1, \frac{1}{2})^\top$, $v_2 = (-1, 0, 2)^\top$ a $v_3 = (-1, 1, 0)^\top$.

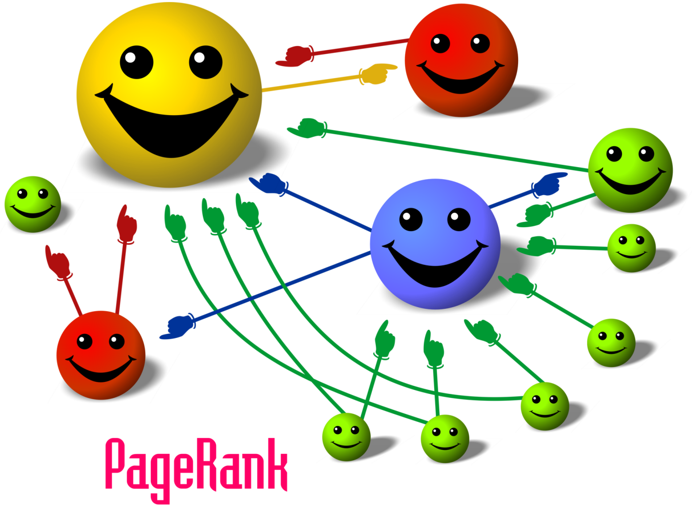
- Příklad výpočtu s $x_0 = (1, 0, 1)^\top$:

i	$\frac{x_i}{\lVert x_i \rVert_\infty}$	$x_{i-1}^\top y_i$
0	$(1.00, 0.00, 1.00)^\top$	-
1	$(0.67, 1.00, 0.17)^\top$	5
2	$(1.00, 0.88, 0.56)^\top$	6.32
3	$(0.97, 1.00, 0.47)^\top$	6.94
4	$(1.00, 1.00, 0.50)^\top$	7

Aplikace: Google PageRank

Aplikace: Google PageRank

- Na vlastních číslech je založen algoritmus PageRank používaný vyhledávačem Google k měření důležitosti webových stránek.



Zdroj: https://en.wikipedia.org/

Aplikace: Google PageRank

Aplikace: Google PageRank

- Mějme webovou síť s parametry N = počet stránek, $a_{i,j} \in \{0, 1\}$, kde $a_{i,j} = 1 \Leftrightarrow j$-tá stránka odkazuje na i-tou, b_j = počet odkazů z j-té stránky.

Aplikace: Google PageRank

- Mějme webovou síť s parametry $N =$ počet stránek, $a_{i,j} \in \{0, 1\}$, kde $a_{i,j} = 1 \Leftrightarrow j$-tá stránka odkazuje na i-tou, $b_j =$ počet odkazů z j-té stránky. Chceme spočítat důležitost x_i i-té stránky.

Aplikace: Google PageRank

- Mějme webovou síť s parametry N = počet stránek, $a_{i,j} \in \{0,1\}$, kde $a_{i,j} = 1 \Leftrightarrow j$-tá stránka odkazuje na i-tou, b_j = počet odkazů z j-té stránky. Chceme spočítat důležitost x_i i-té stránky.
- Důležitost i-té stránky je úměrná součtu důležitosti stránek na ni odkazujících. Tedy $x_i = \sum_{j=1}^{N} \frac{a_{i,j}}{b_j} x_j$.

Aplikace: Google PageRank

- Mějme webovou síť s parametry $N =$ počet stránek, $a_{i,j} \in \{0,1\}$, kde $a_{i,j} = 1 \Leftrightarrow j$-tá stránka odkazuje na i-tou, $b_j =$ počet odkazů z j-té stránky. Chceme spočítat důležitost x_i i-té stránky.
- Důležitost i-té stránky je úměrná součtu důležitosti stránek na ni odkazujících. Tedy $x_i = \sum_{j=1}^{N} \frac{a_{i,j}}{b_j} x_j$. Maticově $A'x = x$, kde $A'_{i,j} = \frac{a_{i,j}}{b_j}$.

Aplikace: Google PageRank

- Mějme webovou síť s parametry N = počet stránek, $a_{i,j} \in \{0,1\}$, kde $a_{i,j} = 1 \Leftrightarrow j$-tá stránka odkazuje na i-tou, b_j = počet odkazů z j-té stránky. Chceme spočítat důležitost x_i i-té stránky.
- Důležitost i-té stránky je úměrná součtu důležitosti stránek na ni odkazujících. Tedy $x_i = \sum_{j=1}^{N} \frac{a_{i,j}}{b_j} x_j$. Maticově $A'x = x$, kde $A'_{i,j} = \frac{a_{i,j}}{b_j}$.
- Tedy x je vlastním vektorem matice A' příslušejícím vlastnímu číslu 1.

Aplikace: Google PageRank

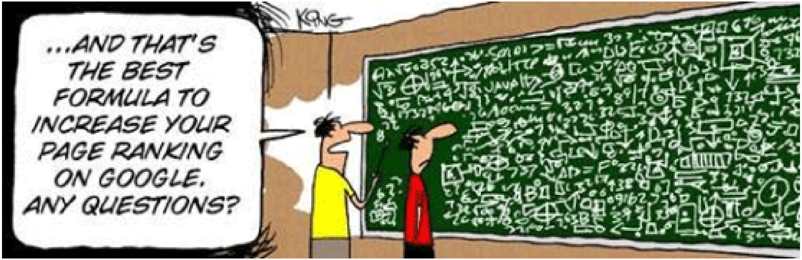
- Mějme webovou síť s parametry N = počet stránek, $a_{i,j} \in \{0,1\}$, kde $a_{i,j} = 1 \Leftrightarrow j$-tá stránka odkazuje na i-tou, b_j = počet odkazů z j-té stránky. Chceme spočítat důležitost x_i i-té stránky.
- Důležitost i-té stránky je úměrná součtu důležitosti stránek na ni odkazujících. Tedy $x_i = \sum_{j=1}^{N} \frac{a_{i,j}}{b_j} x_j$. Maticově $A'x = x$, kde $A'_{i,j} = \frac{a_{i,j}}{b_j}$.
- Tedy x je vlastním vektorem matice A' příslušejícím vlastnímu číslu 1.
- Matice A' má 1 jako největší vlastní číslo a jeho vlastní vektor x je nezáporný. Znormujeme ho, aby $x \in [0,10]^N$.

Aplikace: Google PageRank

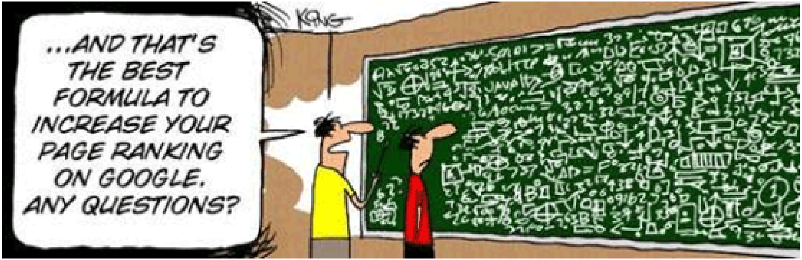
- Mějme webovou síť s parametry N = počet stránek, $a_{i,j} \in \{0, 1\}$, kde $a_{i,j} = 1 \Leftrightarrow j$-tá stránka odkazuje na i-tou, b_j = počet odkazů z j-té stránky. Chceme spočítat důležitost x_i i-té stránky.
- Důležitost i-té stránky je úměrná součtu důležitosti stránek na ni odkazujících. Tedy $x_i = \sum_{j=1}^{N} \frac{a_{i,j}}{b_j} x_j$. Maticově $A'x = x$, kde $A'_{i,j} = \frac{a_{i,j}}{b_j}$.
- Tedy x je vlastním vektorem matice A' příslušejícím vlastnímu číslu 1.
- Matice A' má 1 jako největší vlastní číslo a jeho vlastní vektor x je nezáporný. Znormujeme ho, aby $x \in [0, 10]^N$.
- Matice A' je velká ($N \sim 10^{10}$) a řídká $\Rightarrow$ na výpočet x se hodí mocninná metoda.

Aplikace: Google PageRank

- Mějme webovou síť s parametry N = počet stránek, $a_{i,j} \in \{0, 1\}$, kde $a_{i,j} = 1 \Leftrightarrow j$-tá stránka odkazuje na i-tou, b_j = počet odkazů z j-té stránky. Chceme spočítat důležitost x_i i-té stránky.
- Důležitost i-té stránky je úměrná součtu důležitosti stránek na ni odkazujících. Tedy $x_i = \sum_{j=1}^{N} \frac{a_{i,j}}{b_j} x_j$. Maticově $A'x = x$, kde $A'_{i,j} = \frac{a_{i,j}}{b_j}$.
- Tedy x je vlastním vektorem matice A' příslušejícím vlastnímu číslu 1.
- Matice A' má 1 jako největší vlastní číslo a jeho vlastní vektor x je nezáporný. Znormujeme ho, aby $x \in [0, 10]^N$.
- Matice A' je velká ($N \sim 10^{10}$) a řídká $\Rightarrow$ na výpočet x se hodí mocninná metoda.
- Příklady hodnot (2010):
  - `https://www.google.com`: 10
  - `https://cuni.cz`: 8
  - `https://www.mff.cuni.cz`: 7
  - `https://www.kam.mff.cuni.cz`: 6



Zdroj: https://www.techdreams.org/



Zdroj: https://www.techdreams.org/

Děkuji za pozornost.