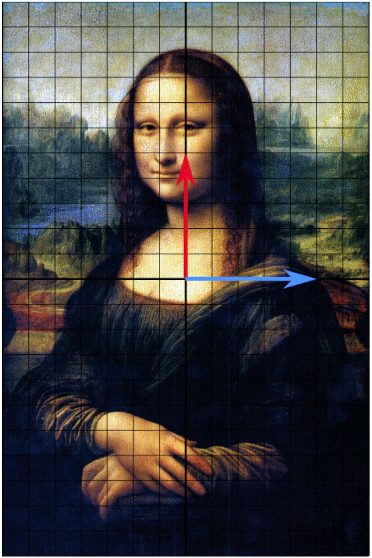
# Lineární algebra 2

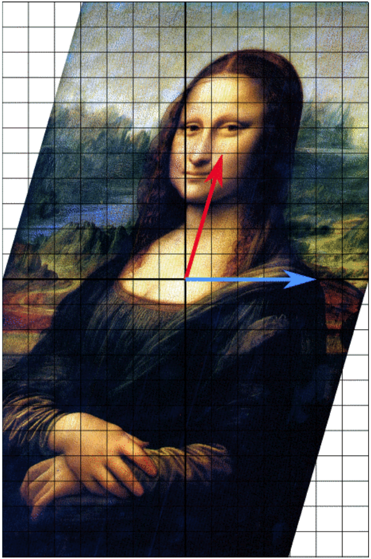
Martin Balko

## 8. přednáška

4. dubna 2022

# Vlastní čísla





Zdroj: https://en.wikipedia.org

# Připomenutí z minula

# Připomenutí z minula

- Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastním číslem matice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ s vlastním vektorem $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{o\}$, pokud $Ax = \lambda x$.

# Připomenutí z minula

- Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastním číslem matice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ s vlastním vektorem $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{o\}$, pokud $Ax = \lambda x$.

**Věta 7.1** (Charakterizace vlastních čísel a vektorů)

Pro matici $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ platí

- $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastním číslem $A \Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0$,
- $x \in \mathbb{C}^n$ je vlastním vektorem příslušným k $\lambda \Leftrightarrow o \neq x \in \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n)$.

# Připomenutí z minula

- Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastním číslem matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ s vlastním vektorem $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{o\}$, pokud $Ax = \lambda x$.

**Věta 7.1** (Charakterizace vlastních čísel a vektorů)

Pro matici $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ platí

- $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastním číslem $A \Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0$,
- $x \in \mathbb{C}^n$ je vlastním vektorem příslušným k $\lambda \Leftrightarrow o \neq x \in \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n)$.

- Tedy vlastní čísla jsou kořeny charakteristického polynomu $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ a je jich právě $n$ (s násobnostmi).

# Připomenutí z minula

- Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastním číslem matice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ s vlastním vektorem $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{o\}$, pokud $Ax = \lambda x$.

**Věta 7.1 (Charakterizace vlastních čísel a vektorů)**

Pro matici $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ platí

- $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastním číslem $A \Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0$,
- $x \in \mathbb{C}^n$ je vlastním vektorem příslušným k $\lambda \Leftrightarrow o \neq x \in \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n)$.

- Tedy vlastní čísla jsou kořeny charakteristického polynomu $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ a je jich právě $n$ (s násobnostmi).
- Výpočet vlastních čísel tedy jde převést na výpočet kořenů polynomu.

# Připomenutí z minula

- Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastním číslem matice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ s vlastním vektorem $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{o\}$, pokud $Ax = \lambda x$.

**Věta 7.1 (Charakterizace vlastních čísel a vektorů)**

Pro matici $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ platí

- $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastním číslem $A \Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0$,
- $x \in \mathbb{C}^n$ je vlastním vektorem příslušným k $\lambda \Leftrightarrow o \neq x \in \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n)$.

- Tedy vlastní čísla jsou kořeny charakteristického polynomu $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ a je jich právě $n$ (s násobnostmi).
- Výpočet vlastních čísel tedy jde převést na výpočet kořenů polynomu.
- Převod funguje i na druhou stranu.

# Matice společnice

# Matice společnice

- Matice společnice polynomu $p(x) = x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ je maticí $C(p) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, kde

$$C(p) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & \ddots & & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & -\alpha_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

# Matice společnice

- Matice společnice polynomu $p(x) = x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ je maticí $C(p) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, kde

$$C(p) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & \ddots & & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & -\alpha_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

**Věta 7.4 (O matici společnici)**

Pro charakteristický polynom matice $C(p)$ platí $p_{C(p)}(\lambda) = (-1)^n p(\lambda)$.

# Matice společnice

- Matice společnice polynomu $p(x) = x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ je maticí $C(p) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, kde

$$C(p) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & \ddots & & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & -\alpha_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

**Věta 7.4 (O matici společnici)**

Pro charakteristický polynom matice $C(p)$ platí $p_{C(p)}(\lambda) = (-1)^n p(\lambda)$.

- Tedy vlastní čísla matice $C(p)$ odpovídají kořenům polynomu $p(\lambda)$.

# Matice společnice

- Matice společnice polynomu $p(x) = x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ je maticí $C(p) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, kde

$$C(p) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & \ddots & & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & -\alpha_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

**Věta 7.4 (O matici společnici)**

Pro charakteristický polynom matice $C(p)$ platí $p_{C(p)}(\lambda) = (-1)^n p(\lambda)$.

- Tedy vlastní čísla matice $C(p)$ odpovídají kořenům polynomu $p(\lambda)$.
- Výpočet kořenů polynomu tedy jde převést na výpočet vlastních čísel.

# Cayleyho–Hamiltonova věta

# Cayleyho–Hamiltonova věta

- Příklad polynomiální matice a maticového polynomu:

$$\begin{pmatrix} \lambda^2 - \lambda & 2\lambda - 3 \\ 7 & 5\lambda^2 - 4 \end{pmatrix} = \lambda^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$$

# Cayleyho–Hamiltonova věta

- Příklad polynomiální matice a maticového polynomu:

$$\begin{pmatrix} \lambda^2 - \lambda & 2\lambda - 3 \\ 7 & 5\lambda^2 - 4 \end{pmatrix} = \lambda^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$$

- Pro $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ platí $p_A(A) = 0$.

Obrázek: Arthur Cayley (1821–1895) a William Rowan Hamilton (1805–1865).

Zdroje: http://math-physics-problems.wikia.org a http://en.wikipedia.org

# Cayleyho–Hamiltonova věta

- Příklad polynomiální matice a maticového polynomu:

$$\begin{pmatrix} \lambda^2 - \lambda & 2\lambda - 3 \\ 7 & 5\lambda^2 - 4 \end{pmatrix} = \lambda^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$$

- Pro $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ platí $p_A(A) = 0$.

Obrázek: Arthur Cayley (1821–1895) a William Rowan Hamilton (1805–1865).

Zdroje: http://math-physics-problems.wikia.org a http://en.wikipedia.org

- Cayley objevil tuto identitu v roce 1858 a Hamilton v roce 1853, oba pouze pro řád 3. Na vyšší řády ji zobecnil až Frobenius v roce 1878.

# Geometrická interpretace diagonalizace

# Geometrická interpretace diagonalizace

- Vlastní vektor = invariantní směr při zobrazení $f(x) = Ax$,
  Vlastní číslo = škálování v tomto směru.

# Geometrická interpretace diagonalizace

- Vlastní vektor = invariantní směr při zobrazení $f(x) = Ax$, Vlastní číslo = škálování v tomto směru.
- Je-li $S$ maticí přechodu k nové bázi, pak

$$SAS^{-1} = {}_{B'}[id]_B \cdot {}_B[f]_B \cdot {}_B[id]_{B'} = {}_{B'}[f]_{B'}$$

je maticí zobrazení $f$ vzhledem k nové bázi.

# Geometrická interpretace diagonalizace

- Vlastní vektor = invariantní směr při zobrazení $f(x) = Ax$,
  Vlastní číslo = škálování v tomto směru.
- Je-li $S$ maticí přechodu k nové bázi, pak

  $$SAS^{-1} = {}_{B'}[id]_B \cdot {}_B[f]_B \cdot {}_B[id]_{B'} = {}_{B'}[f]_{B'}$$

  je maticí zobrazení $f$ vzhledem k nové bázi.
- Diagonalizovatelnost je hledání vhodné báze $B'$, aby matice ${}_{B'}[f]_{B'}$ byla diagonální a tak jednoduše popisovala chování $f$.

# Geometrická interpretace diagonalizace

- Vlastní vektor = invariantní směr při zobrazení $f(x) = Ax$,
  Vlastní číslo = škálování v tomto směru.
- Je-li $S$ maticí přechodu k nové bázi, pak

$$SAS^{-1} = {}_{B'}[id]_B \cdot {}_B[f]_B \cdot {}_B[id]_{B'} = {}_{B'}[f]_{B'}$$

  je maticí zobrazení $f$ vzhledem k nové bázi.
- Diagonalizovatelnost je hledání vhodné báze $B'$, aby matice ${}_{B'}[f]_{B'}$ byla diagonální a tak jednoduše popisovala chování $f$.
- Podobnost znamená změnu báze, ale nemění lineární zobrazení $f$, takže vlastní čísla musí zůstat stejná.

# Geometrická interpretace diagonalizace: příklad

# Geometrická interpretace diagonalizace: příklad

- Matice $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ má vlastní čísla $\lambda_1 = 4$ a $\lambda_2 = 2$ s vlastními vektory $x_1 = (1, 1)^\top$ a $x_2 = (-1, 1)^\top$.

# Geometrická interpretace diagonalizace: příklad

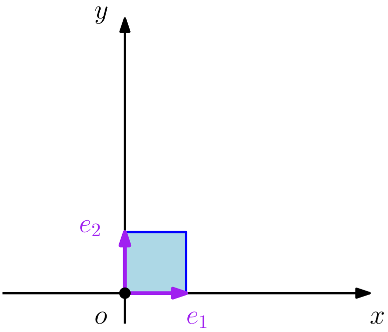
- Matice $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ má vlastní čísla $\lambda_1 = 4$ a $\lambda_2 = 2$ s vlastními vektory $x_1 = (1, 1)^\top$ a $x_2 = (-1, 1)^\top$.
- Diagonalizace má tvar $A = S\Lambda S^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

# Geometrická interpretace diagonalizace: příklad

- Matice $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ má vlastní čísla $\lambda_1 = 4$ a $\lambda_2 = 2$ s vlastními vektory $x_1 = (1, 1)^\top$ a $x_2 = (-1, 1)^\top$.
- Diagonalizace má tvar $A = S\Lambda S^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.
- Je-li matice zobrazení diagonální, pak zobrazení představuje jen škálování ve směrech vlastních vektorů.

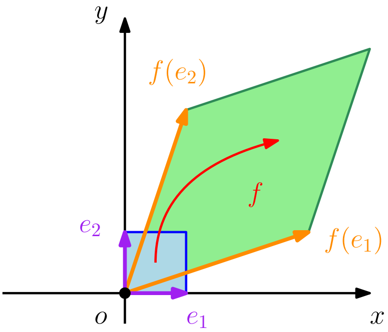
# Geometrická interpretace diagonalizace: příklad

- Matice $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ má vlastní čísla $\lambda_1 = 4$ a $\lambda_2 = 2$ s vlastními vektory $x_1 = (1, 1)^\top$ a $x_2 = (-1, 1)^\top$.
- Diagonalizace má tvar $A = S\Lambda S^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{smallmatrix}\right)$.
- Je-li matice zobrazení diagonální, pak zobrazení představuje jen škálování ve směrech vlastních vektorů.



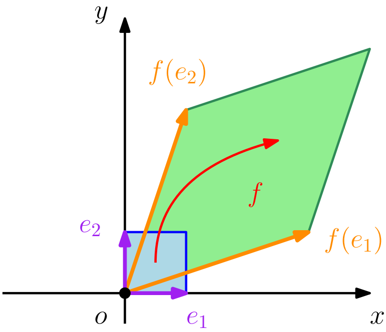
# Geometrická interpretace diagonalizace: příklad

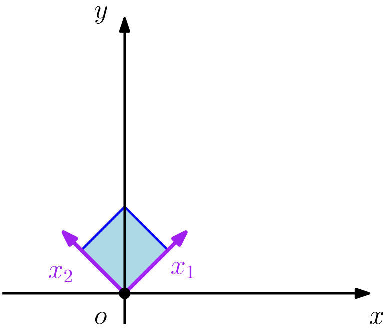
- Matice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ má vlastní čísla $\lambda_1 = 4$ a $\lambda_2 = 2$ s vlastními vektory $x_1 = (1, 1)^\top$ a $x_2 = (-1, 1)^\top$.
- Diagonalizace má tvar $A = S\Lambda S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.
- Je-li matice zobrazení diagonální, pak zobrazení představuje jen škálování ve směrech vlastních vektorů.



# Geometrická interpretace diagonalizace: příklad

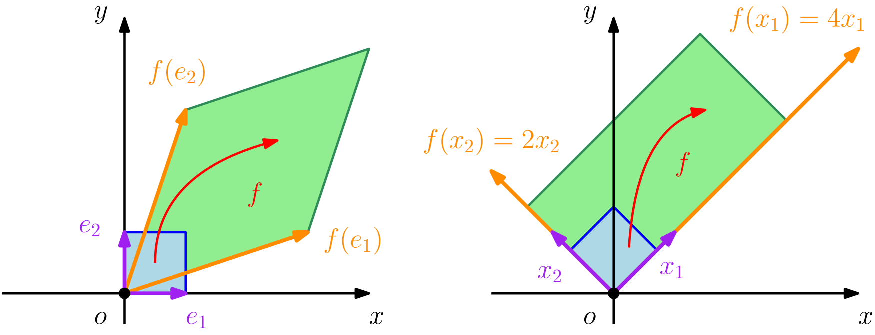
- Matice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ má vlastní čísla $\lambda_1 = 4$ a $\lambda_2 = 2$ s vlastními vektory $x_1 = (1, 1)^\top$ a $x_2 = (-1, 1)^\top$.
- Diagonalizace má tvar $A = S\Lambda S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.
- Je-li matice zobrazení diagonální, pak zobrazení představuje jen škálování ve směrech vlastních vektorů.

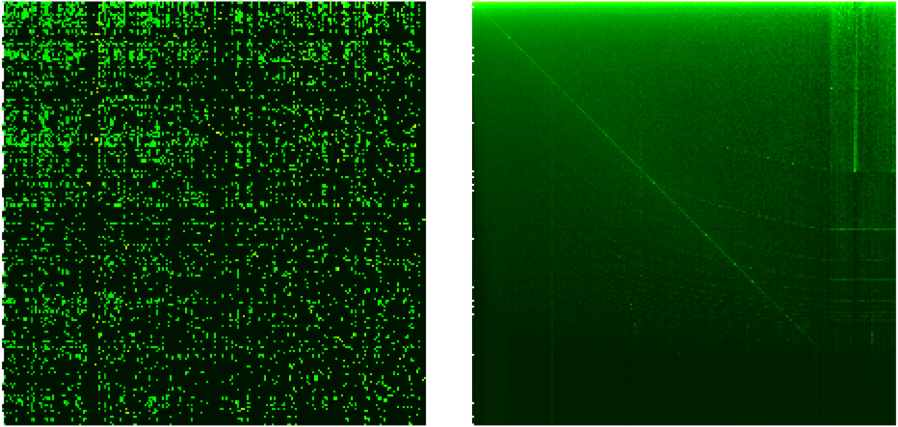


# Geometrická interpretace diagonalizace: příklad

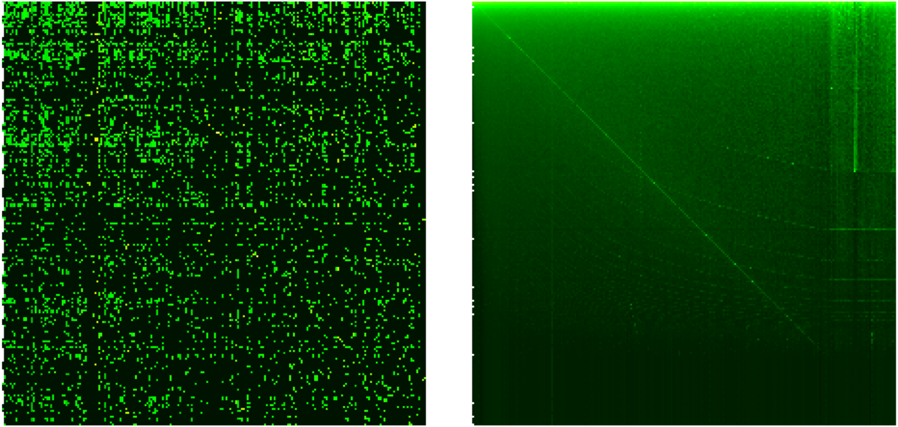
- Matice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ má vlastní čísla $\lambda_1 = 4$ a $\lambda_2 = 2$ s vlastními vektory $x_1 = (1, 1)^\top$ a $x_2 = (-1, 1)^\top$.
- Diagonalizace má tvar $A = S\Lambda S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.
- Je-li matice zobrazení diagonální, pak zobrazení představuje jen škálování ve směrech vlastních vektorů.





Obrázek: Matice Google pro anglickou Wikipedii

Zdroj: Ermann: Google matrix analysis of directed networks



Obrázek: Matice Google pro anglickou Wikipedii

Zdroj: Ermann: Google matrix analysis of directed networks

# Děkuji za pozornost.