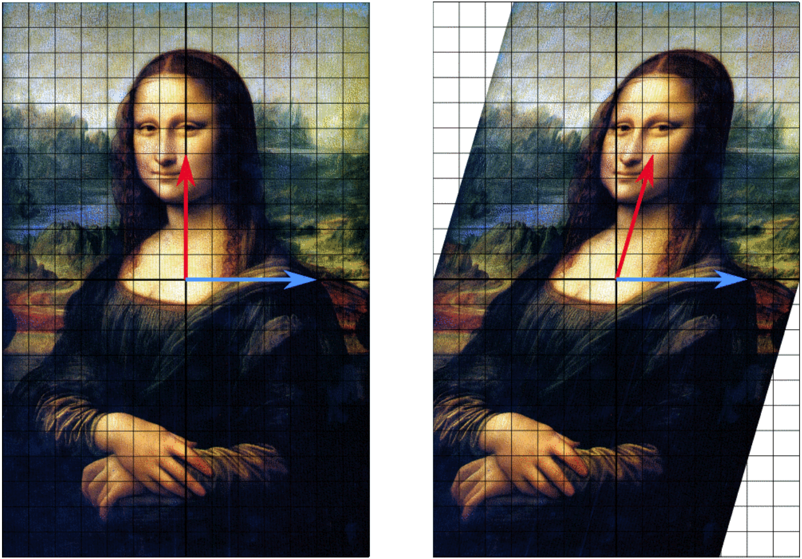
Lineární algebra 2

Martin Balko

7. přednáška

28. března 2022

Vlastní čísla



Zdroj: https://en.wikipedia.org

Vlastní čísla a vektory: příklad

Vlastní čísla a vektory: příklad

- Určíme vlastní čísla matice překlopení podle přímky $y = -x$

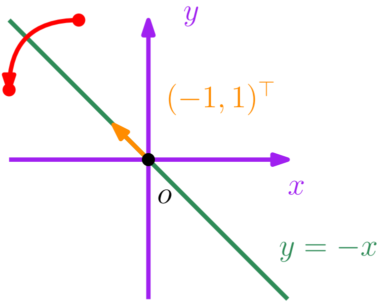
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

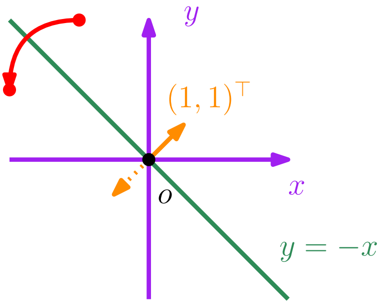
Vlastní čísla a vektory: příklad

- Určíme vlastní čísla matice překlopení podle přímky $y = -x$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Matice A má vlastní čísla 1 a -1.



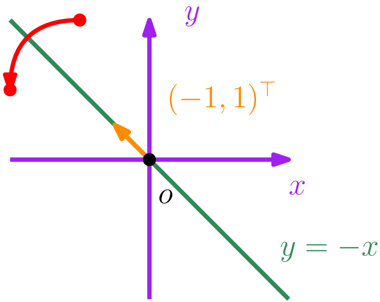


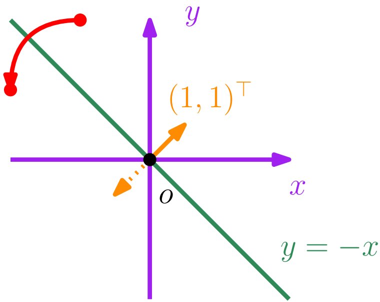
Vlastní čísla a vektory: příklad

- Určíme vlastní čísla matice překlopení podle přímky $y = -x$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Matice A má vlastní čísla 1 a -1.





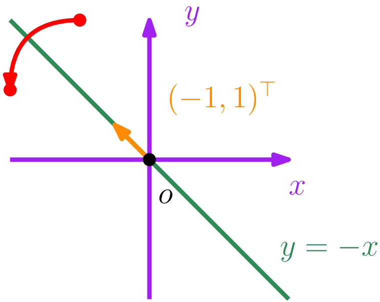
- Příslušné vlastní vektory jsou $(-1, 1)^\top$ a $(1, 1)^\top$.

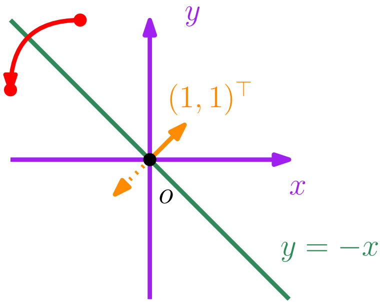
Vlastní čísla a vektory: příklad

- Určíme vlastní čísla matice překlopení podle přímky $y = -x$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Matice A má vlastní čísla 1 a -1.





- Příslušné vlastní vektory jsou $(-1,1)^\top$ a $(1,1)^\top$.
- Například matice rotace $R = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ o úhel $\pi/2$ nemá žádná reálná vlastní čísla.

Vlastní čísla a vektory: geometrický význam

Vlastní čísla a vektory: geometrický význam

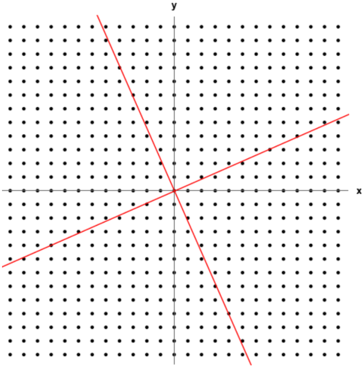
- Vlastní vektor je invariantní směr při zobrazení $x \mapsto Ax$.

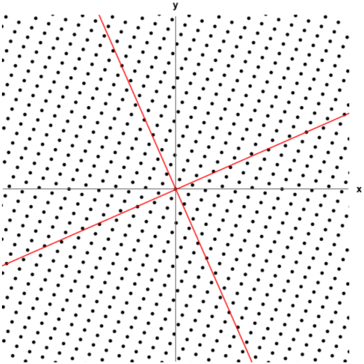
Vlastní čísla a vektory: geometrický význam

- Vlastní vektor je invariantní směr při zobrazení $x \mapsto Ax$.
- Vlastní číslo je pak škálování v tomto směru.

Vlastní čísla a vektory: geometrický význam

- Vlastní vektor je invariantní směr při zobrazení $x \mapsto Ax$.
- Vlastní číslo je pak škálování v tomto směru.
- Například tyto dva červené směry v následujícím zobrazení:



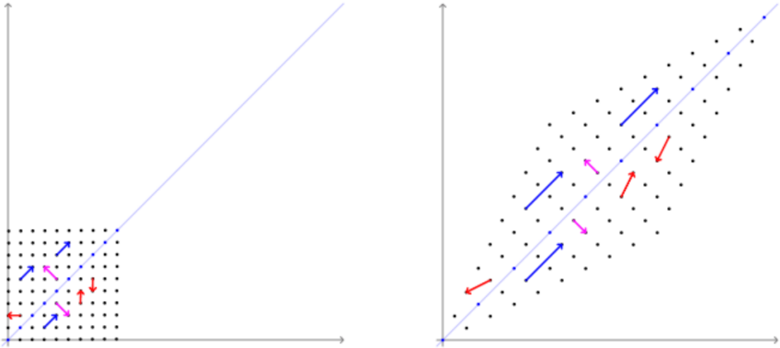


Zdroj: https://en.wikipedia.org

Vlastní čísla a vektory: geometrický význam

Vlastní čísla a vektory: geometrický význam

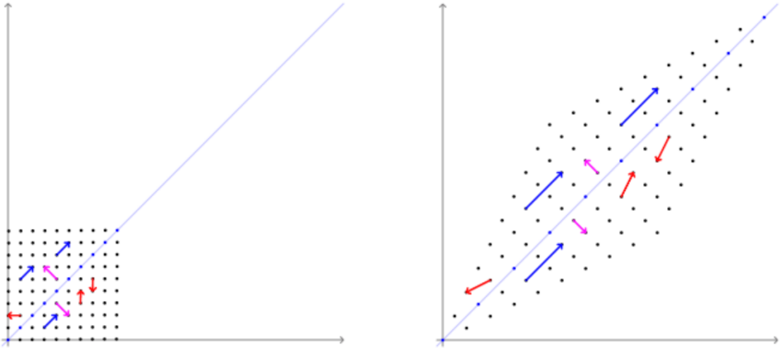
- Jiný příklad: v zobrazení určeném maticí $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ jsou vlastní čísla 3 a 1 s příslušnými vlastními vektory $(1, 1)^\top$ a $(1, -1)^\top$.



Zdroj: https://en.wikipedia.org

Vlastní čísla a vektory: geometrický význam

- Jiný příklad: v zobrazení určeném maticí $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ jsou vlastní čísla 3 a 1 s příslušnými vlastními vektory $(1,1)^\top$ a $(1,-1)^\top$.



Zdroj: https://en.wikipedia.org

- Proto se zachovávají modré směry, které jsou protažené třikrát, a fialové směry, které protažené nejsou. Červené směry se nezachovávají.

Charakteristický polynom: příklad

Charakteristický polynom: příklad

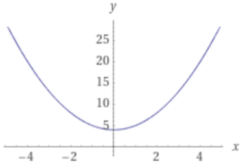
- Určíme charakteristický polynom $p_A(\lambda)$ matice $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

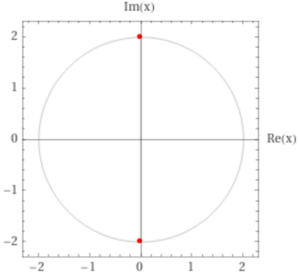
Charakteristický polynom: příklad

- Určíme charakteristický polynom $p_A(\lambda)$ matice $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, kde
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Máme
$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4 = (\lambda + 2i)(\lambda - 2i).$$



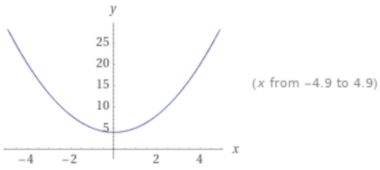
(x from −4.9 to 4.9)

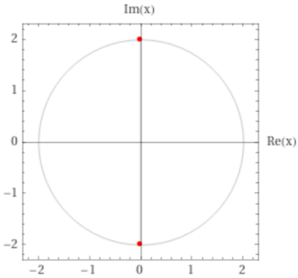


Charakteristický polynom: příklad

- Určíme charakteristický polynom $p_A(\lambda)$ matice $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, kde
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Máme
$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4 = (\lambda + 2i)(\lambda - 2i).$$



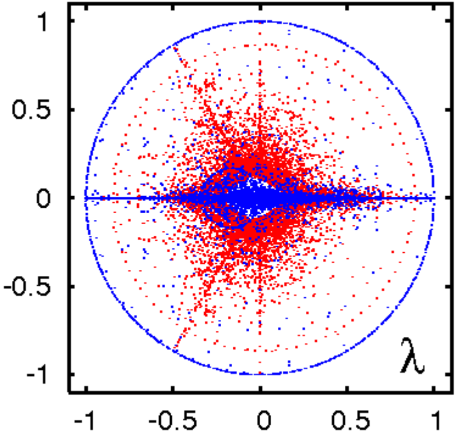


- Tedy vlastními čísly jsou $2i$ a $-2i$ s vlastními vektory $(1, i)^\top$ a $(1, -i)^\top$.

Spektrum matice: příklad

Spektrum matice: příklad

- Následující obrázek ukazuje spektrum matice, kterou používá Google ve svém PageRank algoritmu k ohodnocení stránek při vyhledávání. Konkrétně se jedná o matici pro Cambridge University network (2006).

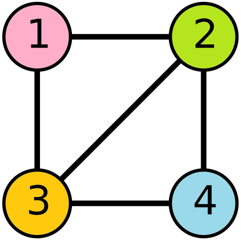


Zdroj: https://en.wikipedia.org

Aplikace: teorie grafů

Aplikace: teorie grafů

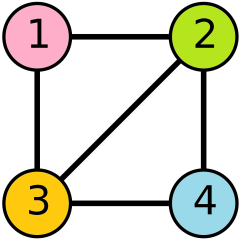
- Z vlastních čísel $\lambda_1^A \geq \cdots \geq \lambda_n^A$ matice sousednosti $A(G)$ či $\lambda_1^L \geq \cdots \geq \lambda_n^L$ Laplaciánu $L(G)$ lze vyčíst spoustu informací o grafu G.



$$L(G) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Aplikace: teorie grafů

- Z vlastních čísel $\lambda_1^A \geq \cdots \geq \lambda_n^A$ matice sousednosti $A(G)$ či $\lambda_1^L \geq \cdots \geq \lambda_n^L$ Laplaciánu $L(G)$ lze vyčíst spoustu informací o grafu G.

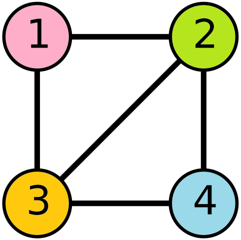


$$L(G) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Například:

Aplikace: teorie grafů

- Z vlastních čísel $\lambda_1^A \geq \cdots \geq \lambda_n^A$ matice sousednosti $A(G)$ či $\lambda_1^L \geq \cdots \geq \lambda_n^L$ Laplaciánu $L(G)$ lze vyčíst spoustu informací o grafu G.

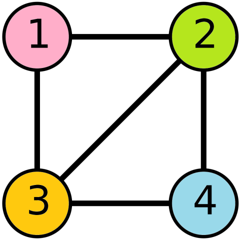


$$L(G) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Například:
  - násobnost nuly mezi $\lambda_1^L, \ldots, \lambda_n^L$ = počet komponent G,

Aplikace: teorie grafů

- Z vlastních čísel $\lambda_1^A \geq \cdots \geq \lambda_n^A$ matice sousednosti $A(G)$ či $\lambda_1^L \geq \cdots \geq \lambda_n^L$ Laplaciánu $L(G)$ lze vyčíst spoustu informací o grafu G.

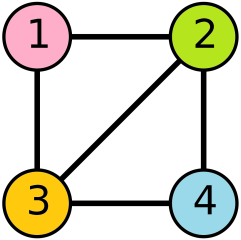


$$L(G) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Například:
  - násobnost nuly mezi $\lambda_1^L, \ldots, \lambda_n^L$ = počet komponent G,
  - $\lambda_{n-1}^L > 0$ právě tehdy, když je G souvislý,

Aplikace: teorie grafů

- Z vlastních čísel $\lambda_1^A \geq \cdots \geq \lambda_n^A$ matice sousednosti $A(G)$ či $\lambda_1^L \geq \cdots \geq \lambda_n^L$ Laplaciánu $L(G)$ lze vyčíst spoustu informací o grafu G.

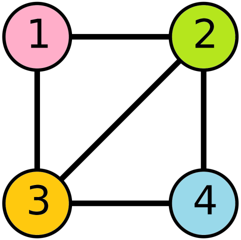


$$L(G) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Například:
  - násobnost nuly mezi $\lambda_1^L, \ldots, \lambda_n^L$ = počet komponent G,
  - $\lambda_{n-1}^L > 0$ právě tehdy, když je G souvislý,
  - souvislý G je bipartitní právě tehdy, když $\lambda_1^A = -\lambda_n^A$,

Aplikace: teorie grafů

- Z vlastních čísel $\lambda_1^A \geq \cdots \geq \lambda_n^A$ matice sousednosti $A(G)$ či $\lambda_1^L \geq \cdots \geq \lambda_n^L$ Laplaciánu $L(G)$ lze vyčíst spoustu informací o grafu G.



$$L(G) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Například:
  - násobnost nuly mezi $\lambda_1^L, \ldots, \lambda_n^L$ = počet komponent G,
  - $\lambda_{n-1}^L > 0$ právě tehdy, když je G souvislý,
  - souvislý G je bipartitní právě tehdy, když $\lambda_1^A = -\lambda_n^A$,
  - λ_1^A je mezi průměrným a maximálním stupněm G.

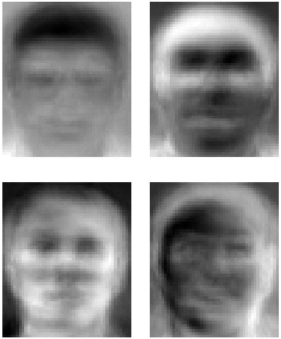
Aplikace: rozpoznávání tváří

Aplikace: rozpoznávání tváří

- Reprezentujme tvář jako vektor $v \in \mathbb{R}^N$, kde v_i je světlost i-tého pixelu. Potom vlastní vektory tzv. kovarianční matice databáze tváří se nazvývají eigenfaces.

Aplikace: rozpoznávání tváří

- Reprezentujme tvář jako vektor $v \in \mathbb{R}^N$, kde v_i je světlost i-tého pixelu. Potom vlastní vektory tzv. kovarianční matice databáze tváří se nazvývají eigenfaces. Každá tvář je jejich lineární kombinací a používají se k rychlému rozpoznávání tváří (image processing).

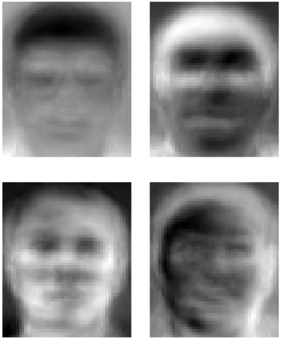


Obrázek: Eigenfaces z AT&T Laboratories Cambridge.

Zdroj: https://en.wikipedia.org

Aplikace: rozpoznávání tváří

- Reprezentujme tvář jako vektor $v \in \mathbb{R}^N$, kde v_i je světlost i-tého pixelu. Potom vlastní vektory tzv. kovarianční matice databáze tváří se nazvývají eigenfaces. Každá tvář je jejich lineární kombinací a používají se k rychlému rozpoznávání tváří (image processing).



Obrázek: Eigenfaces z AT&T Laboratories Cambridge.

Zdroj: https://en.wikipedia.org

- Podobně u rozpoznávání hlasu, podpisů, odezírání ze rtů atd.

Zdroj: https://memegenerator.net/

Zdroj: https://memegenerator.net/

Děkuji za pozornost.