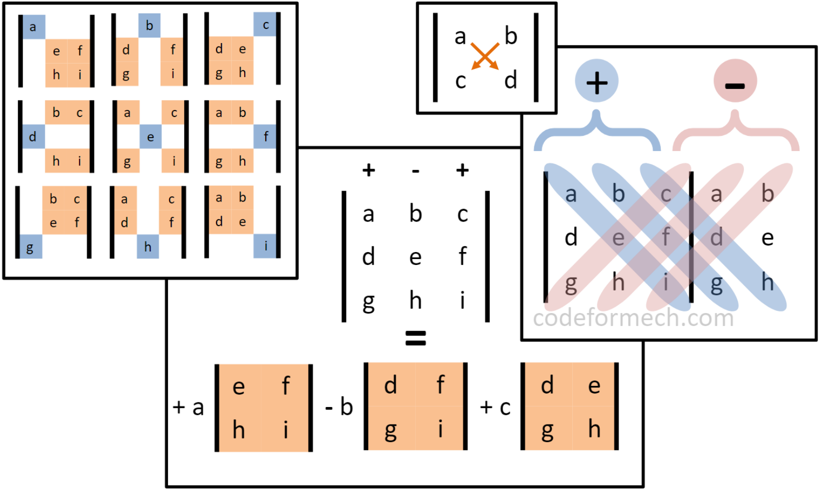
Lineární algebra 2

Martin Balko

6. přednáška

21. března 2022

Determinanty

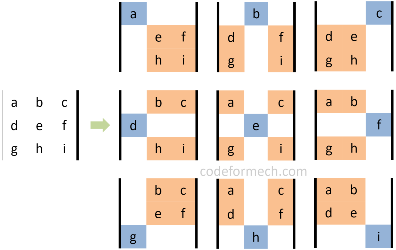


Zdroj: https://www.codeformech.com/

Laplaceův rozvoj

Laplaceův rozvoj

- $n \geq 2$, $A \in \mathbb{T}^{n \times n}$, $i = 1, \ldots, n \Rightarrow \det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{i,j} \cdot \det(A^{i,j})$.

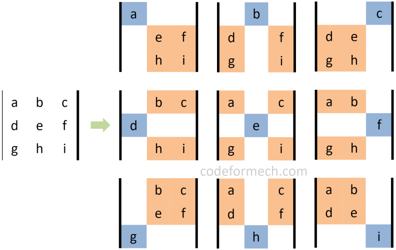


Obrázek: Pierre-Simon Laplace (1749–1827)

Zdroje: https://en.wikipedia.org a https://www.codeformech.com/

Laplaceův rozvoj

- $n \geq 2$, $A \in \mathbb{T}^{n \times n}$, $i = 1, \ldots, n \Rightarrow \det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{i,j} \cdot \det(A^{i,j})$.



Obrázek: Pierre-Simon Laplace (1749–1827)

Zdroje: https://en.wikipedia.org a https://www.codeformech.com/

- Vhodné pro důkazy indukcí a didaktické účely, pro výpočet na velkých maticích bývá lepší Gaussova eliminace.

Laplaceův rozvoj: příklad pro $n = 3$ a $i = 1$

Laplaceův rozvoj: příklad pro $n = 3$ a $i = 1$

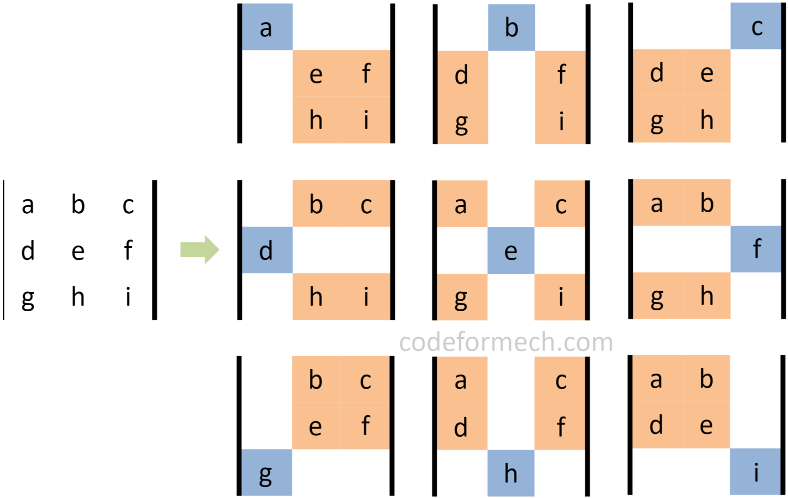
$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \end{array}$$

$$=$$

$$+\, a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

Zdroj: https://www.codeformech.com/

Laplaceův rozvoj: příklad pro $n = 3$ a $i = 1, 2, 3$

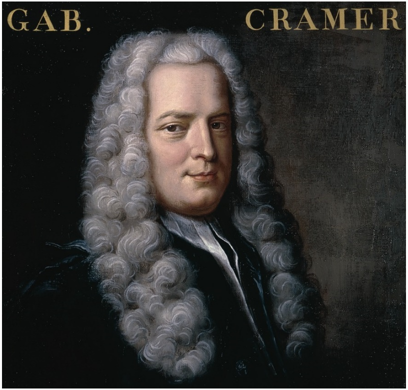


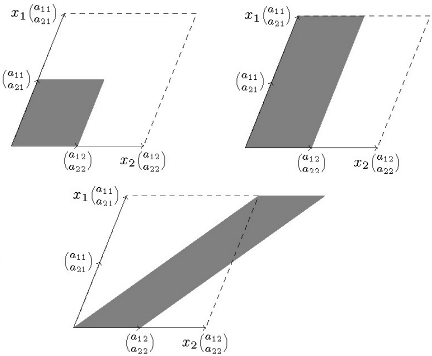
Zdroj: https://www.codeformech.com/

Cramerovo pravidlo

Cramerovo pravidlo

- Pro regulární $A \in \mathbb{T}^{n \times n}$ a $b \in Ax = b$ je řešení soustavy $Ax = b$ dáno vzorcem $x_i = \det(A + (b - A_{*,i})e_i^\top)/\det(A)$ pro $i = 1, \dots, n$.



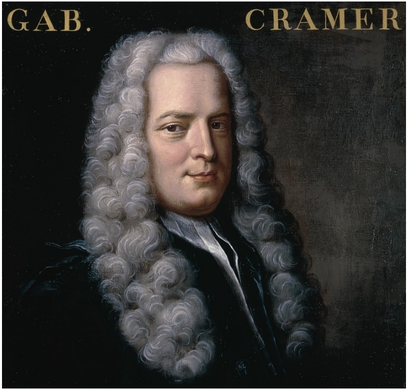


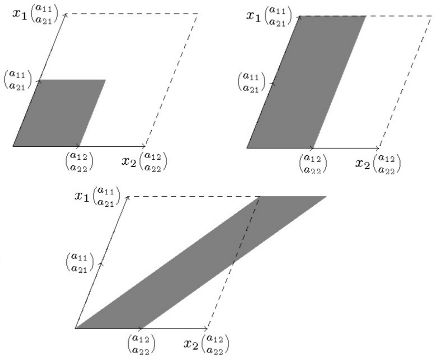
Obrázek: Gabriel Cramer (1704–1752)

Zdroj: https://en.wikipedia.org

Cramerovo pravidlo

- Pro regulární $A \in \mathbb{T}^{n\times n}$ a $b \in Ax = b$ je řešení soustavy $Ax = b$ dáno vzorcem $x_i = \det(A + (b - A_{*,i})e_i^\top)/\det(A)$ pro $i = 1, \ldots, n$.





Obrázek: Gabriel Cramer (1704–1752)

Zdroj: https://en.wikipedia.org

- Kdysi populární nástroj na řešení soustav lineárních rovnic. Dnes se pro jejich řešení přiliš nepoužívá, má ale teoretický význam.

Adjungovaná matice: příklad

Adjungovaná matice: příklad

- Uvažme následující matici $A \in \mathbb{Z}^{3\times 3}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Adjungovaná matice: příklad

- Uvažme následující matici $A \in \mathbb{Z}^{3\times 3}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

- Její adjungovanou maticí je

Adjungovaná matice: příklad

- Uvažme následující matici $A \in \mathbb{Z}^{3\times 3}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

- Její adjungovanou maticí je

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -4 \\ -3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Adjungovaná matice: příklad

- Uvažme následující matici $A \in \mathbb{Z}^{3\times 3}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

- Její adjungovanou maticí je

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -4 \\ -3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Takže

Adjungovaná matice: příklad

- Uvažme následující matici $A \in \mathbb{Z}^{3\times 3}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

- Její adjungovanou maticí je

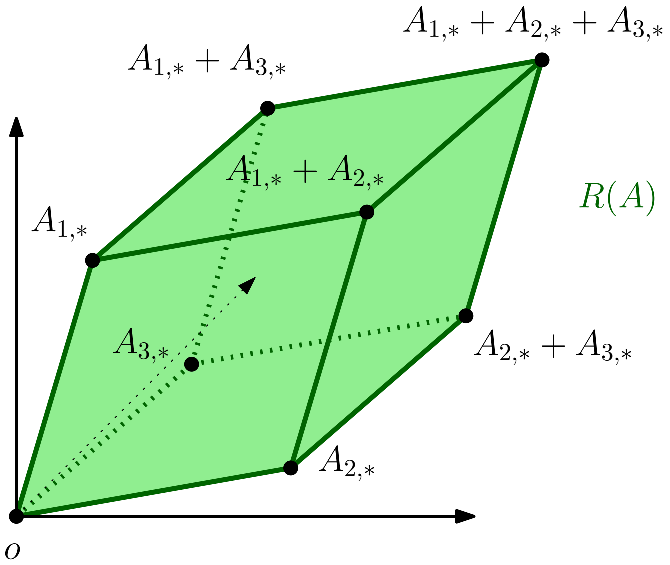
$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -4 \\ -3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Takže

$$A^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(A)}{\det(A)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 5 & -4 \\ -3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

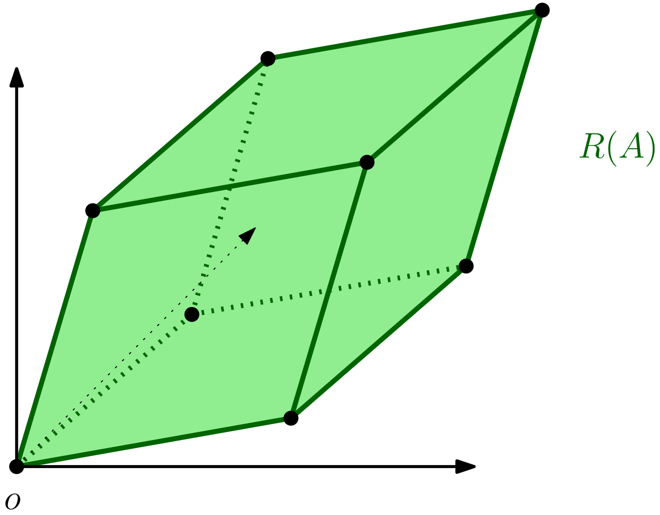
Geometrická reprezentace determinantu

Geometrická reprezentace determinantu



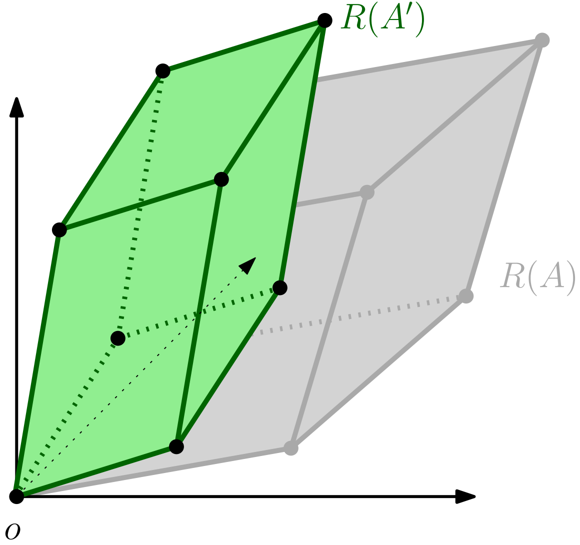
$$|\det(\mathrm{A})| = \text{ objem rovnoběžnostěnu } R(A)$$

Vynásobení $A_{i,*}$ číslem α



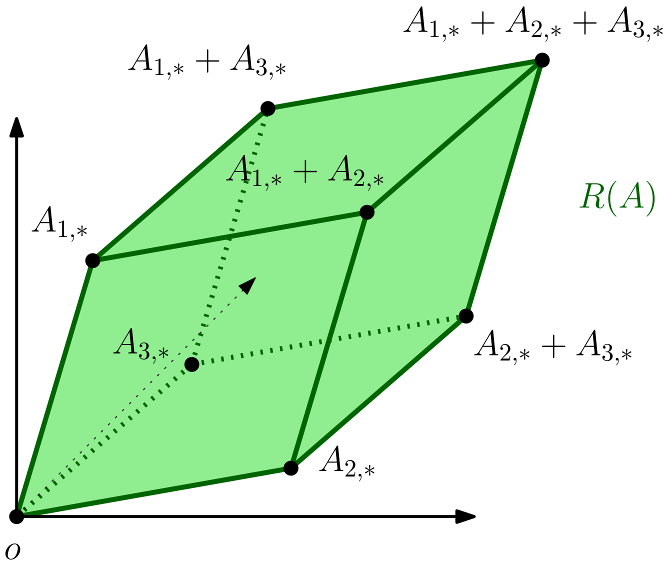
$$|\det(\mathrm{A})| = \text{ objem rovnoběžnostěnu } R(A)$$

Vynásobení $A_{i,*}$ číslem α = protáhnutí



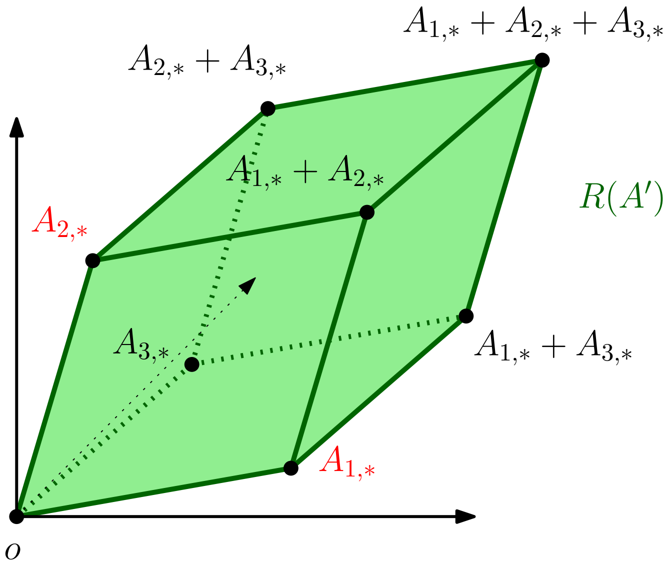
$$\text{objem } R(A') = \alpha \cdot \text{ objem } R(A)$$

Prohození $A_{i,*}$ a $A_{j,*}$



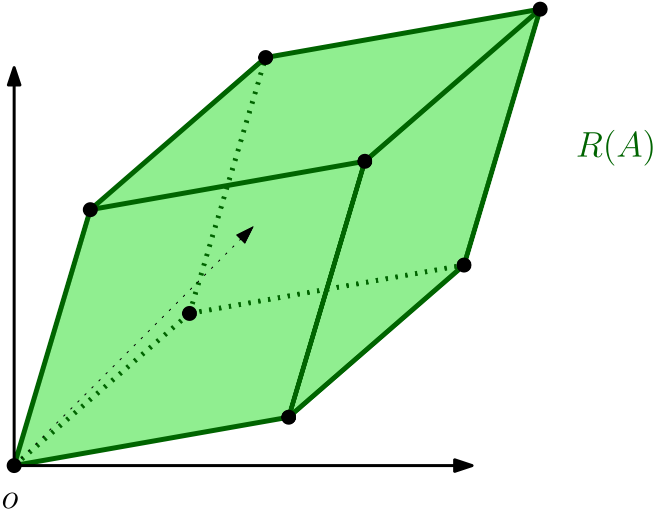
$$|\det(\mathrm{A})| = \text{ objem rovnoběžnostěnu } R(A)$$

Prohození $A_{i,*}$ a $A_{j,*}$ = překlopení



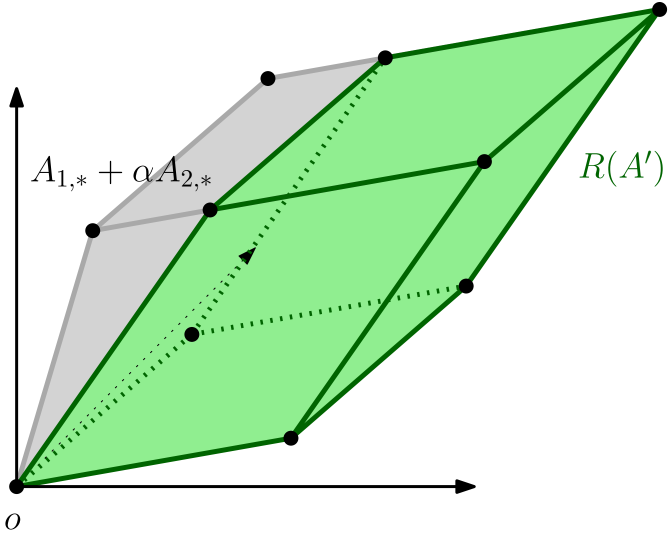
objem $R(A')$ = objem $R(A)$

Přičtení $\alpha A_{j,*}$ k $A_{i,*}$



$|\det(\mathrm{A})| =$ objem rovnoběžnostěnu $R(A)$

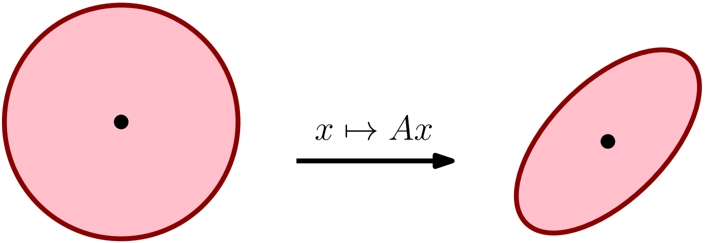
Přičtení $\alpha A_{j,*}$ k $A_{i,*}$ = zkosení



objem $R(A')$ = objem $R(A)$

Změna objemu při lineárním zobrazení

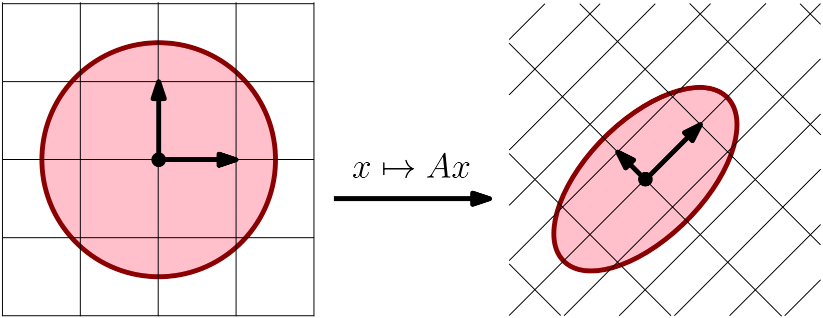
Změna objemu při lineárním zobrazení



objem V — objem $|\det(A)| \cdot V$

$$|\det(\mathrm{A})| = \text{ koeficient změny objemu}$$

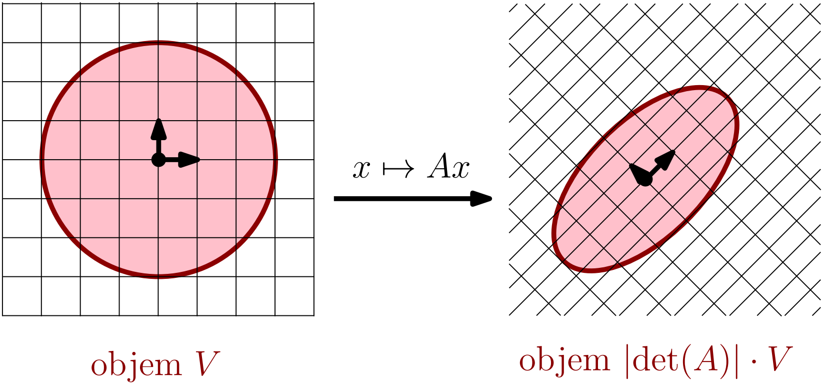
Změna objemu při lineárním zobrazení



objem V objem $|\det(A)| \cdot V$

$$|\det(\mathrm{A})| = \text{ koeficient změny objemu}$$

Změna objemu při lineárním zobrazení



$$|\det(\mathrm{A})| = \text{ koeficient změny objemu}$$

Zdroj: https://memegenerator.net/

Zdroj: https://memegenerator.net/

Děkuji za pozornost.