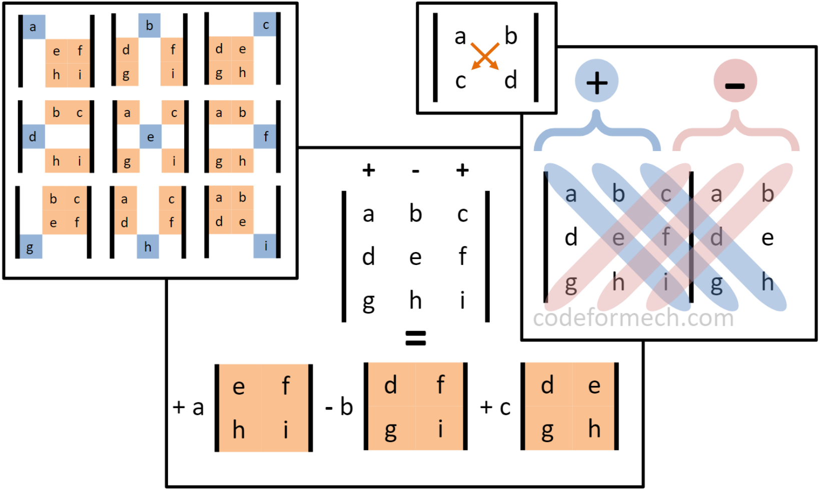
Lineární algebra 2

Martin Balko

5. přednáška

14. března 2022

Determinanty



Zdroj: https://www.codeformech.com/

Příklad výpočtu determinantu

Příklad výpočtu determinantu

- Determinant matice řádu 2:

$$\det\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix} = A_{1,1}A_{2,2} - A_{1,2}A_{2,1}.$$

Příklad výpočtu determinantu

- Determinant matice řádu 2:

$$\det\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix} = A_{1,1}A_{2,2} - A_{1,2}A_{2,1}.$$

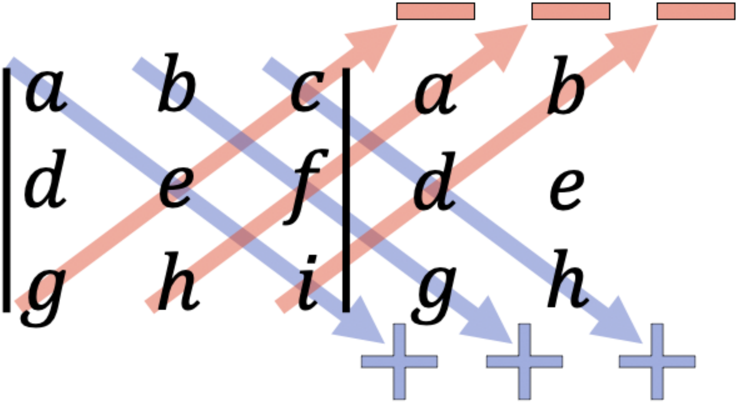
- Determinant matice řádu 3:

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{pmatrix} &= A_{1,1}A_{2,2}A_{3,3} + A_{1,2}A_{2,3}A_{3,1} + A_{1,3}A_{2,1}A_{3,2} \\ &\quad - A_{3,1}A_{2,2}A_{1,3} - A_{2,1}A_{1,2}A_{3,3} - A_{1,1}A_{3,2}A_{2,3}.\end{aligned}$$

Trik: výpočet determinantu matice 3

Trik: výpočet determinantu matice 3

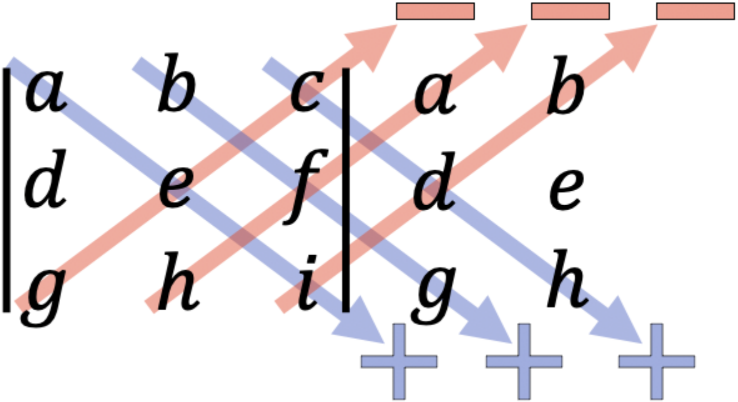
- Pro výpočet determinantu matice 3×3 stačí násobit po „diagonálách“.



Zdroj: https://www.algebrapracticeproblems.com/

Trik: výpočet determinantu matice 3

- Pro výpočet determinantu matice 3×3 stačí násobit po „diagonálách“.



Zdroj: https://www.algebrapracticeproblems.com/

- Zde je determinant roven $aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$.

Determinant

Determinant

- Determinant objevil Gottfried Wilhelm Leibniz a nezávisle na něm Takakazu Seki („japonský Newton“).


Obrázek: Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) a Takakazu Seki (1642–1708)

Zdroj: https://en.wikipedia.org

Determinant

- Determinant objevil Gottfried Wilhelm Leibniz a nezávisle na něm Takakazu Seki („japonský Newton").

Obrázek: Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) a Takakazu Seki (1642–1708)

Zdroj: https://en.wikipedia.org

- Determinanty se staly populární pro řešení soustav rovnic až v letech 1750–1900.

Příklad výpočtu determinantu pomocí REF

Příklad výpočtu determinantu pomocí REF

- Algoritmus: převeď matici A do odstupňovaného tvaru A' a pamatuj si změny determinantu v koeficientu c. Pak $\det(A) = c^{-1} A'_{1,1} \cdots A'_{n,n}$.

Příklad výpočtu determinantu pomocí REF

- Algoritmus: převeď matici A do odstupňovaného tvaru A' a pamatuj si změny determinantu v koeficientu c. Pak $\det(A) = c^{-1} A'_{1,1} \cdots A'_{n,n}$.
- Pomocí REF spočítáme determinant následující matice A řádu 4:

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Příklad výpočtu determinantu pomocí REF

- Algoritmus: převeď matici A do odstupňovaného tvaru A' a pamatuj si změny determinantu v koeficientu c. Pak $\det(A) = c^{-1} A'_{1,1} \cdots A'_{n,n}$.
- Pomocí REF spočítáme determinant následující matice A řádu 4:

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Příklad výpočtu determinantu pomocí REF

- Algoritmus: převeď matici A do odstupňovaného tvaru A' a pamatuj si změny determinantu v koeficientu c. Pak $\det(A) = c^{-1} A'_{1,1} \cdots A'_{n,n}$.
- Pomocí REF spočítáme determinant následující matice A řádu 4:

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Příklad výpočtu determinantu pomocí REF

- Algoritmus: převeď matici A do odstupňovaného tvaru A' a pamatuj si změny determinantu v koeficientu c. Pak $\det(A) = c^{-1} A'_{1,1} \cdots A'_{n,n}$.
- Pomocí REF spočítáme determinant následující matice A řádu 4:

$$\det(A) = -1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Příklad výpočtu determinantu pomocí REF

- Algoritmus: převeď matici A do odstupňovaného tvaru A' a pamatuj si změny determinantu v koeficientu c. Pak $\det(A) = c^{-1} A'_{1,1} \cdots A'_{n,n}$.
- Pomocí REF spočítáme determinant následující matice A řádu 4:

$$\det(A) = -1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Příklad výpočtu determinantu pomocí REF

- Algoritmus: převeď matici A do odstupňovaného tvaru A' a pamatuj si změny determinantu v koeficientu c. Pak $\det(A) = c^{-1}A'_{1,1}\cdots A'_{n,n}$.
- Pomocí REF spočítáme determinant následující matice A řádu 4:

$$\det(A) = 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Příklad výpočtu determinantu pomocí REF

- Algoritmus: převeď matici A do odstupňovaného tvaru A' a pamatuj si změny determinantu v koeficientu c. Pak $\det(A) = c^{-1} A'_{1,1} \cdots A'_{n,n}$.
- Pomocí REF spočítáme determinant následující matice A řádu 4:

$$\det(A) = 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 \end{pmatrix}.$$

Příklad výpočtu determinantu pomocí REF

- Algoritmus: převeď matici A do odstupňovaného tvaru A' a pamatuj si změny determinantu v koeficientu c. Pak $\det(A) = c^{-1} A'_{1,1} \cdots A'_{n,n}$.
- Pomocí REF spočítáme determinant následující matice A řádu 4:

$$\det(A) = 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 \end{pmatrix}.$$

Příklad výpočtu determinantu pomocí REF

- Algoritmus: převeď matici A do odstupňovaného tvaru A' a pamatuj si změny determinantu v koeficientu c. Pak $\det(A) = c^{-1} A'_{1,1} \cdots A'_{n,n}$.
- Pomocí REF spočítáme determinant následující matice A řádu 4:

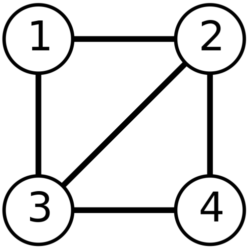
$$\det(A) = 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 \end{pmatrix} = 5.$$

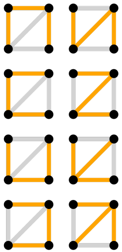
Aplikace: počet koster v grafu

Aplikace: počet koster v grafu

- Počet koster v grafu $G = (V, E)$ se dá spočítat pomocí determinantu Laplaceovy matice $L(G) \in \mathbb{R}^{|V|\times|V|}$, kde

$$L(G)_{u,v} = \begin{cases} \deg_G(u), & \text{pokud } u = v \\ -1, & \{u, v\} \in E \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$





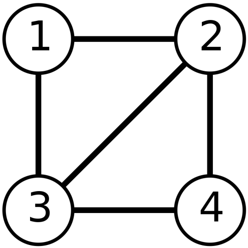
$$L(G) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

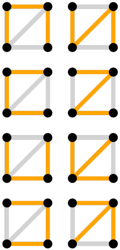
Zdroj: https://en.wikipedia.org

Aplikace: počet koster v grafu

- Počet koster v grafu $G = (V, E)$ se dá spočítat pomocí determinantu Laplaceovy matice $L(G) \in \mathbb{R}^{|V| \times |V|}$, kde

$$L(G)_{u,v} = \begin{cases} \deg_G(u), & \text{pokud } u = v \\ -1, & \{u, v\} \in E \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$





$$L(G) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Zdroj: https://en.wikipedia.org

- Počet koster v G se totiž rovná $\det(L(G)^{1,1})$.

Zdroj: https://imgflip.com/

Zdroj: https://imgflip.com/

Děkuji za pozornost.