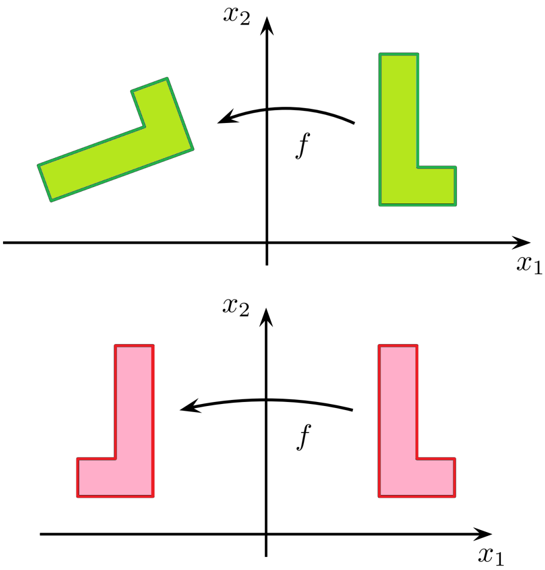
Lineární algebra 2

Martin Balko

4. přednáška

4. března 2022

Ortogonální matice



Zdroj: M. Hladík: Lineární algebra (nejen) pro informatiky (vybarveno)

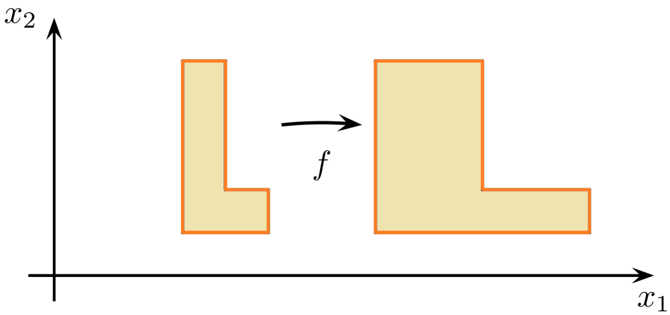
Motivace

Motivace

- Víme, že matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ odpovídají lineárním zobrazením $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Motivace

- Víme, že matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ odpovídají lineárním zobrazením $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.
- Například následující zobrazení roztáhnutí je určené maticí $A = \begin{pmatrix} 5/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.



Zdroj: M. Hladík: Lineární algebra (nejen) pro informatiky (vybarveno)

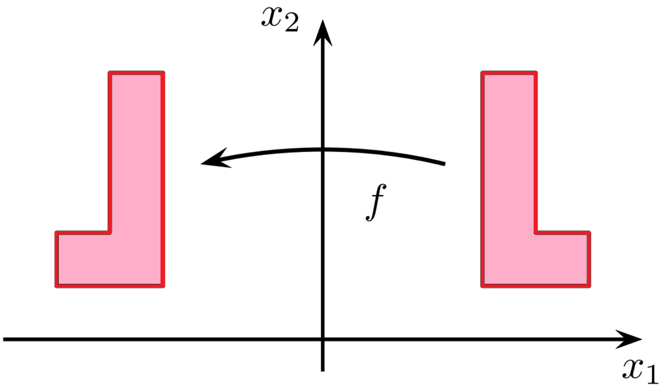
Motivace

Motivace

- Některá zobrazení $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ nemění délky a ani úhly.

Motivace

- Některá zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ nemění délky a ani úhly.
- Například zrcadlení určené maticí $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

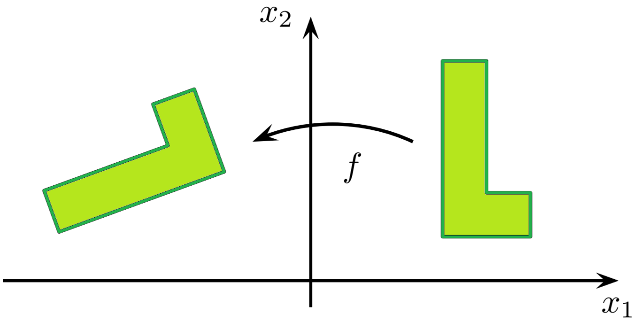


Zdroj: M. Hladík: Lineární algebra (nejen) pro informatiky (vybarveno)

Motivace

Motivace

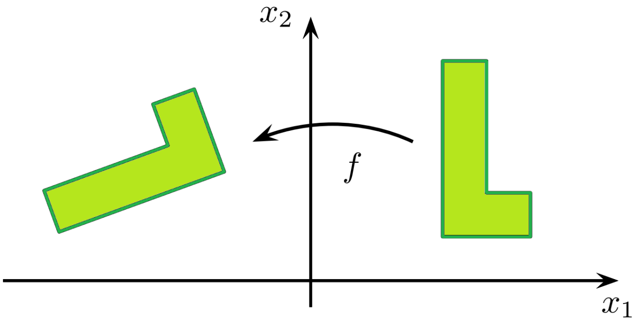
- Nebo rotace o úhel φ určená maticí $A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$.



Zdroj: M. Hladík: Lineární algebra (nejen) pro informatiky (vybarveno)

Motivace

- Nebo rotace o úhel φ určená maticí $A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$.

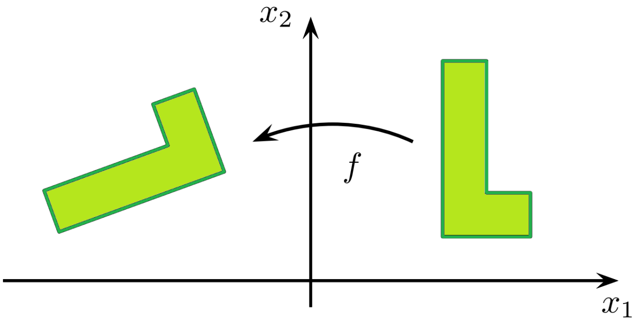


Zdroj: M. Hladík: Lineární algebra (nejen) pro informatiky (vybarveno)

- Jaká matice odpovídají takovým zobrazením?

Motivace

- Nebo rotace o úhel φ určená maticí $A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$.



Zdroj: M. Hladík: Lineární algebra (nejen) pro informatiky (vybarveno)

- Jaká matice odpovídají takovým zobrazením? Ortogonální!

Ortogonální matice

Ortogonální matice

- Matice $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je ortogonální, pokud $Q^\top Q = I_n$.

Ortogonální matice

- Matice $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je ortogonální, pokud $Q^\top Q = I_n$.
- Definici jsme mohli zavést mnoha způsoby.

Ortogonální matice

- Matice $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je ortogonální, pokud $Q^\top Q = I_n$.
- Definici jsme mohli zavést mnoha způsoby.

Tvrzení 4.1 (Charakterizace ortogonálních matic)

Následující tvrzení jsou ekvivalentní pro každou $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

- Q je ortogonální,
- Q je regulární a $Q^{-1} = Q^\top$,
- $QQ^\top = I_n$,
- $Q^\top$ je ortogonální,
- Q^{-1} existuje a je ortogonální,
- sloupce Q tvoří ortonormální bázi $\mathbb{R}^n$,
- řádky Q tvoří ortonormální bázi $\mathbb{R}^n$.

Ortogonální matice

- Matice $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je ortogonální, pokud $Q^\top Q = I_n$.
- Definici jsme mohli zavést mnoha způsoby.

Tvrzení 4.1 (Charakterizace ortogonálních matic)

Následující tvrzení jsou ekvivalentní pro každou $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

- Q je ortogonální,
- Q je regulární a $Q^{-1} = Q^\top$,
- $QQ^\top = I_n$,
- $Q^\top$ je ortogonální,
- Q^{-1} existuje a je ortogonální,
- sloupce Q tvoří ortonormální bázi $\mathbb{R}^n$,
- řádky Q tvoří ortonormální bázi $\mathbb{R}^n$.

Důkaz (náčrt):

Ortogonální matice

- Matice $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je ortogonální, pokud $Q^\top Q = I_n$.
- Definici jsme mohli zavést mnoha způsoby.

Tvrzení 4.1 (Charakterizace ortogonálních matic)

Následující tvrzení jsou ekvivalentní pro každou $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

- Q je ortogonální,
- Q je regulární a $Q^{-1} = Q^\top$,
- $QQ^\top = I_n$,
- $Q^\top$ je ortogonální,
- Q^{-1} existuje a je ortogonální,
- sloupce Q tvoří ortonormální bázi $\mathbb{R}^n$,
- řádky Q tvoří ortonormální bázi $\mathbb{R}^n$.

Důkaz (náčrt): Je-li Q ortogonální, pak $Q^\top Q = I_n$ a tedy $Q^{-1} = Q^\top$ a podobně naopak.

Ortogonální matice

- Matice $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je ortogonální, pokud $Q^\top Q = I_n$.
- Definici jsme mohli zavést mnoha způsoby.

Tvrzení 4.1 (Charakterizace ortogonálních matic)

Následující tvrzení jsou ekvivalentní pro každou $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

- Q je ortogonální,
- Q je regulární a $Q^{-1} = Q^\top$,
- $QQ^\top = I_n$,
- $Q^\top$ je ortogonální,
- Q^{-1} existuje a je ortogonální,
- sloupce Q tvoří ortonormální bázi $\mathbb{R}^n$,
- řádky Q tvoří ortonormální bázi $\mathbb{R}^n$.

Důkaz (náčrt): Je-li Q ortogonální, pak $Q^\top Q = I_n$ a tedy $Q^{-1} = Q^\top$ a podobně naopak. Z inverze máme i $QQ^\top = I_n$, neboli $(Q^\top)^\top Q^\top = I_n$ a $Q^\top$ je tak ortogonální.

Ortogonální matice

- Matice $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je ortogonální, pokud $Q^\top Q = I_n$.
- Definici jsme mohli zavést mnoha způsoby.

Tvrzení 4.1 (Charakterizace ortogonálních matic)

Následující tvrzení jsou ekvivalentní pro každou $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

- Q je ortogonální,
- Q je regulární a $Q^{-1} = Q^\top$,
- $QQ^\top = I_n$,
- $Q^\top$ je ortogonální,
- Q^{-1} existuje a je ortogonální,
- sloupce Q tvoří ortonormální bázi $\mathbb{R}^n$,
- řádky Q tvoří ortonormální bázi $\mathbb{R}^n$.

Důkaz (náčrt): Je-li Q ortogonální, pak $Q^\top Q = I_n$ a tedy $Q^{-1} = Q^\top$ a podobně naopak. Z inverze máme i $QQ^\top = I_n$, neboli $(Q^\top)^\top Q^\top = I_n$ a $Q^\top$ je tak ortogonální. $\square$

Ortogonální matice a součin

Ortogonální matice a součin

- Přesto se říká „ortogonální matice“ místo „ortonormální matice“.

Ortogonální matice a součin

- Přesto se říká „ortogonální matice“ místo „ortonormální matice“.
- Matice $Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je unitární, pokud $Q^\top \overline{Q} = I_n$.

Ortogonální matice a součin

- Přesto se říká „ortogonální matice“ místo „ortonormální matice“.
- Matice $Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je unitární, pokud $Q^\top \overline{Q} = I_n$. Budeme ale pracovat jen s ortogonálními.

Ortogonální matice a součin

- Přesto se říká „ortogonální matice“ místo „ortonormální matice“.
- Matice $Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je unitární, pokud $Q^\top \overline{Q} = I_n$. Budeme ale pracovat jen s ortogonálními.

- Ortogonálnost matic se zachovává při součinu.

Ortogonální matice a součin

- Přesto se říká „ortogonální matice“ místo „ortonormální matice“.
- Matice $Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je unitární, pokud $Q^\top \overline{Q} = I_n$. Budeme ale pracovat jen s ortogonálními.

- Ortogonálnost matic se zachovává při součinu. Neboli jsou-li $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonální, pak je ortogonální i $Q_1 Q_2$.

Ortogonální matice a součin

- Přesto se říká „ortogonální matice“ místo „ortonormální matice“.
- Matice $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je unitární, pokud $Q^\top \overline{Q} = I_n$. Budeme ale pracovat jen s ortogonálními.

- Ortogonálnost matic se zachovává při součinu. Neboli jsou-li $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonální, pak je ortogonální i $Q_1 Q_2$.
  - To proto, že

$$(Q_1 Q_2)^\top Q_1 Q_2 = Q_2^\top Q_1^\top Q_1 Q_2 = Q_2^\top Q_2 = I_n.$$

Příklad: Householderova matice

Příklad: Householderova matice

- Pro nenulové $a \in \mathbb{R}^n$ se jedná o matici $H(a) = I_n - 2\frac{aa^\top}{a^\top a}$.

Příklad: Householderova matice

- Pro nenulové $a \in \mathbb{R}^n$ se jedná o matici $H(a) = I_n - 2\frac{aa^\top}{a^\top a}$.
- Odpovídá zrcadlení podle nadroviny s normálou a.

Příklad: Householderova matice

- Pro nenulové $a \in \mathbb{R}^n$ se jedná o matici $H(a) = I_n - 2\frac{aa^\top}{a^\top a}$.
- Odpovídá zrcadlení podle nadroviny s normálou a.
- Platí, že každá ortogonální matice řádu n se dá rozložit na součin nanejvýš n Householderových matic (složení nanejvýš n zrcadlení).

Příklad: Householderova matice

- Pro nenulové $a \in \mathbb{R}^n$ se jedná o matici $H(a) = I_n - 2\frac{aa^\top}{a^\top a}$.
- Odpovídá zrcadlení podle nadroviny s normálou a.
- Platí, že každá ortogonální matice řádu n se dá rozložit na součin nanejvýš n Householderových matic (složení nanejvýš n zrcadlení).
- Je-li x' projekcí x na $\mathrm{span}\{a\}$, pak otočení x dle $\mathrm{span}\{a\}$ je

$$x + 2(x' - x) = 2x' - x = 2a(a^\top a)^{-1}a^\top x - x = \left(2\frac{aa^\top}{a^\top a} - I_n\right)x.$$

Příklad: Householderova matice

- Pro nenulové $a \in \mathbb{R}^n$ se jedná o matici $H(a) = I_n - 2\frac{aa^\top}{a^\top a}$.
- Odpovídá zrcadlení podle nadroviny s normálou a.
- Platí, že každá ortogonální matice řádu n se dá rozložit na součin nanejvýš n Householderových matic (složení nanejvýš n zrcadlení).
- Je-li x' projekcí x na $\mathrm{span}\{a\}$, pak otočení x dle $\mathrm{span}\{a\}$ je

$$x + 2(x' - x) = 2x' - x = 2a(a^\top a)^{-1}a^\top x - x = \left(2\frac{aa^\top}{a^\top a} - I_n\right)x.$$

Potom výsledný vektor $\left(I_n - 2\frac{aa^\top}{a^\top a}aa^\top\right)x$ je překlopením podle o.

Příklad: Householderova matice

- Pro nenulové $a \in \mathbb{R}^n$ se jedná o matici $H(a) = I_n - 2\frac{aa^\top}{a^\top a}$.
- Odpovídá zrcadlení podle nadroviny s normálou a.
- Platí, že každá ortogonální matice řádu n se dá rozložit na součin nanejvýš n Householderových matic (složení nanejvýš n zrcadlení).
- Je-li x' projekcí x na $\mathrm{span}\{a\}$, pak otočení x dle $\mathrm{span}\{a\}$ je

$$x + 2(x' - x) = 2x' - x = 2a(a^\top a)^{-1}a^\top x - x = \left(2\frac{aa^\top}{a^\top a} - I_n\right) x.$$

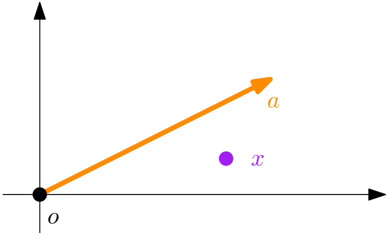
Potom výsledný vektor $\left(I_n - 2\frac{aa^\top}{a^\top a} aa^\top\right) x$ je překlopením podle o.

Příklad: Householderova matice

- Pro nenulové $a \in \mathbb{R}^n$ se jedná o matici $H(a) = I_n - 2\frac{aa^\top}{a^\top a}$.
- Odpovídá zrcadlení podle nadroviny s normálou a.
- Platí, že každá ortogonální matice řádu n se dá rozložit na součin nanejvýš n Householderových matic (složení nanejvýš n zrcadlení).
- Je-li x' projekcí x na $\mathrm{span}\{a\}$, pak otočení x dle $\mathrm{span}\{a\}$ je

$$x + 2(x' - x) = 2x' - x = 2a(a^\top a)^{-1} a^\top x - x = \left(2\frac{aa^\top}{a^\top a} - I_n\right) x.$$

Potom výsledný vektor $\left(I_n - 2\frac{aa^\top}{a^\top a} aa^\top\right) x$ je překlopením podle o.

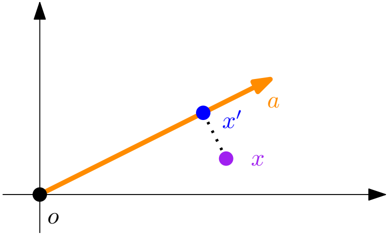


Příklad: Householderova matice

- Pro nenulové $a \in \mathbb{R}^n$ se jedná o matici $H(a) = I_n - 2\frac{aa^\top}{a^\top a}$.
- Odpovídá zrcadlení podle nadroviny s normálou a.
- Platí, že každá ortogonální matice řádu n se dá rozložit na součin nanejvýš n Householderových matic (složení nanejvýš n zrcadlení).
- Je-li x' projekcí x na $\mathrm{span}\{a\}$, pak otočení x dle $\mathrm{span}\{a\}$ je

$$x + 2(x' - x) = 2x' - x = 2a(a^\top a)^{-1}a^\top x - x = \left(2\frac{aa^\top}{a^\top a} - I_n\right)x.$$

Potom výsledný vektor $\left(I_n - 2\frac{aa^\top}{a^\top a}aa^\top\right)x$ je překlopením podle o.

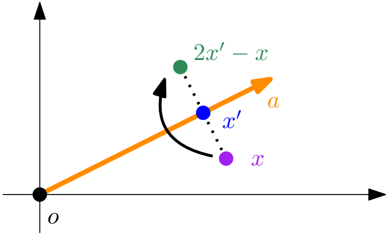


Příklad: Householderova matice

- Pro nenulové $a \in \mathbb{R}^n$ se jedná o matici $H(a) = I_n - 2\frac{aa^\top}{a^\top a}$.
- Odpovídá zrcadlení podle nadroviny s normálou a.
- Platí, že každá ortogonální matice řádu n se dá rozložit na součin nanejvýš n Householderových matic (složení nanejvýš n zrcadlení).
- Je-li x' projekcí x na $\mathrm{span}\{a\}$, pak otočení x dle $\mathrm{span}\{a\}$ je

$$x + 2(x' - x) = 2x' - x = 2a(a^\top a)^{-1} a^\top x - x = \left(2\frac{aa^\top}{a^\top a} - I_n\right) x.$$

Potom výsledný vektor $\left(I_n - 2\frac{aa^\top}{a^\top a} aa^\top\right) x$ je překlopením podle o.

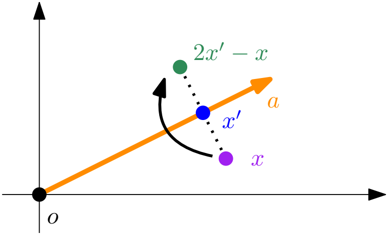


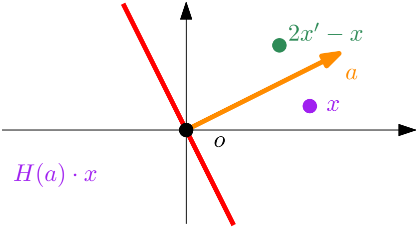
Příklad: Householderova matice

- Pro nenulové $a \in \mathbb{R}^n$ se jedná o matici $H(a) = I_n - 2\frac{aa^\top}{a^\top a}$.
- Odpovídá zrcadlení podle nadroviny s normálou a.
- Platí, že každá ortogonální matice řádu n se dá rozložit na součin nanejvýš n Householderových matic (složení nanejvýš n zrcadlení).
- Je-li x' projekcí x na $\operatorname{span}\{a\}$, pak otočení x dle $\operatorname{span}\{a\}$ je

$$x + 2(x' - x) = 2x' - x = 2a(a^\top a)^{-1} a^\top x - x = \left(2\frac{aa^\top}{a^\top a} - I_n\right) x.$$

Potom výsledný vektor $\left(I_n - 2\frac{aa^\top}{a^\top a} aa^\top\right) x$ je překlopením podle o.



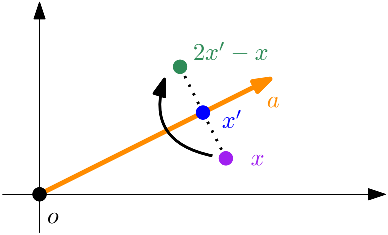


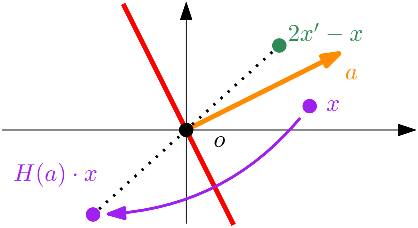
Příklad: Householderova matice

- Pro nenulové $a \in \mathbb{R}^n$ se jedná o matici $H(a) = I_n - 2\frac{aa^\top}{a^\top a}$.
- Odpovídá zrcadlení podle nadroviny s normálou a.
- Platí, že každá ortogonální matice řádu n se dá rozložit na součin nanejvýš n Householderových matic (složení nanejvýš n zrcadlení).
- Je-li x' projekcí x na $\operatorname{span}\{a\}$, pak otočení x dle $\operatorname{span}\{a\}$ je

$$x + 2(x' - x) = 2x' - x = 2a(a^\top a)^{-1}a^\top x - x = \left(2\frac{aa^\top}{a^\top a} - I_n\right)x.$$

Potom výsledný vektor $\left(I_n - 2\frac{aa^\top}{a^\top a}aa^\top\right)x$ je překlopením podle o.





Příklad: Givensova matice

Příklad: Givensova matice

- Pro $n \geq 2$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ a c, s, kde $c^2 + s^2 = 1$, se jedná o matici

$$G_{i,j}(c,s) = \begin{pmatrix} I & & & & \\ & c & & -s & \\ & & I & & \\ & s & & c & \\ & & & & I \end{pmatrix}.$$

Příklad: Givensova matice

- Pro $n \geq 2$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ a c, s, kde $c^2 + s^2 = 1$, se jedná o matici

$$G_{i,j}(c,s) = \begin{pmatrix} I & & & & \\ & c & & -s & \\ & & I & & \\ & s & & c & \\ & & & & I \end{pmatrix}.$$

- Odpovídá otočení o úhel φ v rovině os x_i, x_j.

Příklad: Givensova matice

- Pro $n \geq 2$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ a c, s, kde $c^2 + s^2 = 1$, se jedná o matici

$$G_{i,j}(c,s) = \begin{pmatrix} I & & & & \\ & c & & -s & \\ & & I & & \\ & s & & c & \\ & & & & I \end{pmatrix}.$$

- Odpovídá otočení o úhel φ v rovině os x_i, x_j.
- V rovině je to matice $\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$.

Příklad: Givensova matice

- Pro $n \geq 2$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$ a c, s, kde $c^2 + s^2 = 1$, se jedná o matici

$$G_{i,j}(c,s) = \begin{pmatrix} I & & & & \\ & c & & -s & \\ & & I & & \\ & s & & c & \\ & & & & I \end{pmatrix}.$$

- Odpovídá otočení o úhel φ v rovině os x_i, x_j.
- V rovině je to matice $\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$.
- Platí, že každá ortogonální matice řádu n se dá rozložit na součin nanejvýš $\binom{n}{2}$ Givensových matic a nejvíc jedné diagonální matice s ± 1 na diagonále (složení nanejvýš n otočení a případně jednoho zrcadlení).

Householderovy a Givensovy matice

Householderovy a Givensovy matice

- Jsou v jistém smyslu základními stavebními kameny ortogonálních matic.


Obrázek: Alston Scott Householder (1904–1993) a James Wallace Givens, Jr. (1910–1993).

Zdroje: https://en.wikipedia.org a https://www.siam.org/

Ortogonální matice a zobrazení

Ortogonální matice a zobrazení

- Ortogonální matice odpovídají zobrazením, které nemění délky ani úhly.

Ortogonální matice a zobrazení

- Ortogonální matice odpovídají zobrazením, které nemění délky ani úhly.

Věta 4.2

Ortogonální matice $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ splňuje:

Ortogonální matice a zobrazení

- Ortogonální matice odpovídají zobrazením, které nemění délky ani úhly.

Věta 4.2

Ortogonální matice $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ splňuje:

- $\langle Qx, Qy \rangle = \langle x, y \rangle$ pro každé $x, y \in \mathbb{R}^n$,

Ortogonální matice a zobrazení

- Ortogonální matice odpovídají zobrazením, které nemění délky ani úhly.

Věta 4.2

Ortogonální matice $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ splňuje:

- $\langle Qx, Qy\rangle = \langle x, y\rangle$ pro každé $x, y \in \mathbb{R}^n$,
- $\|Qx\| = \|x\|$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n$,

Ortogonální matice a zobrazení

- Ortogonální matice odpovídají zobrazením, které nemění délky ani úhly.

Věta 4.2

Ortogonální matice $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ splňuje:

- $\langle Qx, Qy \rangle = \langle x, y \rangle$ pro každé $x, y \in \mathbb{R}^n$,
- $\|Qx\| = \|x\|$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n$,
- $|Q_{i,j}| \leq 1$ a $|Q^{-1}_{i,j}| \leq 1$ pro každé $i, j = 1, \dots, n$.

Ortogonální matice a zobrazení

- Ortogonální matice odpovídají zobrazením, které nemění délky ani úhly.

Věta 4.2

Ortogonální matice $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ splňuje:

- $\langle Qx, Qy\rangle = \langle x, y\rangle$ pro každé $x, y \in \mathbb{R}^n$,
- $\|Qx\| = \|x\|$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n$,
- $|Q_{i,j}| \leq 1$ a $|Q^{-1}_{i,j}| \leq 1$ pro každé $i, j = 1, \ldots, n$.

Důkaz:

Ortogonální matice a zobrazení

- Ortogonální matice odpovídají zobrazením, které nemění délky ani úhly.

Věta 4.2

Ortogonální matice $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ splňuje:

- $\langle Qx, Qy\rangle = \langle x, y\rangle$ pro každé $x, y \in \mathbb{R}^n$,
- $\|Qx\| = \|x\|$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n$,
- $|Q_{i,j}| \leq 1$ a $|Q^{-1}_{i,j}| \leq 1$ pro každé $i, j = 1, \dots, n$.

Důkaz:

- $\langle Qx, Qy\rangle$

Ortogonální matice a zobrazení

- Ortogonální matice odpovídají zobrazením, které nemění délky ani úhly.

Věta 4.2

Ortogonální matice $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ splňuje:

- $\langle Qx, Qy \rangle = \langle x, y \rangle$ pro každé $x, y \in \mathbb{R}^n$,
- $\|Qx\| = \|x\|$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n$,
- $|Q_{i,j}| \leq 1$ a $|Q^{-1}_{i,j}| \leq 1$ pro každé $i, j = 1, \ldots, n$.

Důkaz:

- $\langle Qx, Qy \rangle = (Qx)^\top Qy$

Ortogonální matice a zobrazení

- Ortogonální matice odpovídají zobrazením, které nemění délky ani úhly.

Věta 4.2

Ortogonální matice $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ splňuje:

- $\langle Qx, Qy \rangle = \langle x, y \rangle$ pro každé $x, y \in \mathbb{R}^n$,
- $\|Qx\| = \|x\|$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n$,
- $|Q_{i,j}| \leq 1$ a $|Q^{-1}_{i,j}| \leq 1$ pro každé $i, j = 1, \ldots, n$.

Důkaz:

- $\langle Qx, Qy \rangle = (Qx)^\top Qy = x^\top Q^\top Qy$

Ortogonální matice a zobrazení

- Ortogonální matice odpovídají zobrazením, které nemění délky ani úhly.

Věta 4.2

Ortogonální matice $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ splňuje:

- $\langle Qx, Qy \rangle = \langle x, y \rangle$ pro každé $x, y \in \mathbb{R}^n$,
- $\|Qx\| = \|x\|$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n$,
- $|Q_{i,j}| \leq 1$ a $|Q^{-1}_{i,j}| \leq 1$ pro každé $i, j = 1, \dots, n$.

Důkaz:

- $\langle Qx, Qy \rangle = (Qx)^\top Qy = x^\top Q^\top Qy = x^\top y$

Ortogonální matice a zobrazení

- Ortogonální matice odpovídají zobrazením, které nemění délky ani úhly.

Věta 4.2

Ortogonální matice $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ splňuje:

- $\langle Qx, Qy \rangle = \langle x, y \rangle$ pro každé $x, y \in \mathbb{R}^n$,
- $\|Qx\| = \|x\|$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n$,
- $|Q_{i,j}| \leq 1$ a $|Q^{-1}_{i,j}| \leq 1$ pro každé $i, j = 1, \ldots, n$.

Důkaz:

- $\langle Qx, Qy \rangle = (Qx)^\top Qy = x^\top Q^\top Qy = x^\top y = \langle x, y \rangle$.

Ortogonální matice a zobrazení

- Ortogonální matice odpovídají zobrazením, které nemění délky ani úhly.

Věta 4.2

Ortogonální matice $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ splňuje:

- $\langle Qx, Qy \rangle = \langle x, y \rangle$ pro každé $x, y \in \mathbb{R}^n$,
- $\|Qx\| = \|x\|$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n$,
- $|Q_{i,j}| \leq 1$ a $|Q^{-1}_{i,j}| \leq 1$ pro každé $i, j = 1, \ldots, n$.

Důkaz:

- $\langle Qx, Qy \rangle = (Qx)^\top Qy = x^\top Q^\top Qy = x^\top y = \langle x, y \rangle$.
- $\|Qx\|$

Ortogonální matice a zobrazení

- Ortogonální matice odpovídají zobrazením, které nemění délky ani úhly.

Věta 4.2

Ortogonální matice $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ splňuje:

- $\langle Qx, Qy \rangle = \langle x, y \rangle$ pro každé $x, y \in \mathbb{R}^n$,
- $\|Qx\| = \|x\|$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n$,
- $|Q_{i,j}| \leq 1$ a $|Q^{-1}_{i,j}| \leq 1$ pro každé $i, j = 1, \dots, n$.

Důkaz:

- $\langle Qx, Qy \rangle = (Qx)^\top Qy = x^\top Q^\top Qy = x^\top y = \langle x, y \rangle$.
- $\|Qx\| = \sqrt{\langle Qx, Qx \rangle}$

Ortogonální matice a zobrazení

- Ortogonální matice odpovídají zobrazením, které nemění délky ani úhly.

Věta 4.2

Ortogonální matice $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ splňuje:

- $\langle Qx, Qy \rangle = \langle x, y \rangle$ pro každé $x, y \in \mathbb{R}^n$,
- $\|Qx\| = \|x\|$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n$,
- $|Q_{i,j}| \leq 1$ a $|Q^{-1}_{i,j}| \leq 1$ pro každé $i, j = 1, \ldots, n$.

Důkaz:

- $\langle Qx, Qy \rangle = (Qx)^\top Qy = x^\top Q^\top Qy = x^\top y = \langle x, y \rangle$.
- $\|Qx\| = \sqrt{\langle Qx, Qx \rangle} = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

Ortogonální matice a zobrazení

- Ortogonální matice odpovídají zobrazením, které nemění délky ani úhly.

Věta 4.2

Ortogonální matice $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ splňuje:

- $\langle Qx, Qy \rangle = \langle x, y \rangle$ pro každé $x, y \in \mathbb{R}^n$,
- $\|Qx\| = \|x\|$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n$,
- $|Q_{i,j}| \leq 1$ a $|Q^{-1}_{i,j}| \leq 1$ pro každé $i, j = 1, \ldots, n$.

Důkaz:

- $\langle Qx, Qy \rangle = (Qx)^\top Qy = x^\top Q^\top Qy = x^\top y = \langle x, y \rangle$.
- $\|Qx\| = \sqrt{\langle Qx, Qx \rangle} = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \|x\|$.

Ortogonální matice a zobrazení

- Ortogonální matice odpovídají zobrazením, které nemění délky ani úhly.

Věta 4.2

Ortogonální matice $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ splňuje:

- $\langle Qx, Qy \rangle = \langle x, y \rangle$ pro každé $x, y \in \mathbb{R}^n$,
- $\|Qx\| = \|x\|$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n$,
- $|Q_{i,j}| \leq 1$ a $|Q^{-1}_{i,j}| \leq 1$ pro každé $i, j = 1, \ldots, n$.

Důkaz:

- $\langle Qx, Qy \rangle = (Qx)^\top Qy = x^\top Q^\top Qy = x^\top y = \langle x, y \rangle$.
- $\|Qx\| = \sqrt{\langle Qx, Qx \rangle} = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \|x\|$.
- Podle Tvrzení 4.1(6) je pro každé $j = 1, \ldots, n$

$$1 = \|Q_{*,j}\|^2$$

Ortogonální matice a zobrazení

- Ortogonální matice odpovídají zobrazením, které nemění délky ani úhly.

Věta 4.2

Ortogonální matice $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ splňuje:

- $\langle Qx, Qy \rangle = \langle x, y \rangle$ pro každé $x, y \in \mathbb{R}^n$,
- $\|Qx\| = \|x\|$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n$,
- $|Q_{i,j}| \leq 1$ a $|Q^{-1}_{i,j}| \leq 1$ pro každé $i, j = 1, \ldots, n$.

Důkaz:

- $\langle Qx, Qy \rangle = (Qx)^\top Qy = x^\top Q^\top Qy = x^\top y = \langle x, y \rangle$.
- $\|Qx\| = \sqrt{\langle Qx, Qx \rangle} = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \|x\|$.
- Podle Tvrzení 4.1(6) je pro každé $j = 1, \ldots, n$

$$1 = \|Q_{*,j}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} Q_{i,j}^2$$

Ortogonální matice a zobrazení

- Ortogonální matice odpovídají zobrazením, které nemění délky ani úhly.

Věta 4.2

Ortogonální matice $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ splňuje:

- $\langle Qx, Qy \rangle = \langle x, y \rangle$ pro každé $x, y \in \mathbb{R}^n$,
- $\|Qx\| = \|x\|$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n$,
- $|Q_{i,j}| \leq 1$ a $|Q^{-1}_{i,j}| \leq 1$ pro každé $i, j = 1, \ldots, n$.

Důkaz:

- $\langle Qx, Qy \rangle = (Qx)^\top Qy = x^\top Q^\top Qy = x^\top y = \langle x, y \rangle$.
- $\|Qx\| = \sqrt{\langle Qx, Qx \rangle} = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \|x\|$.
- Podle Tvrzení 4.1(6) je pro každé $j = 1, \ldots, n$

$$1 = \|Q_{*,j}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} Q_{i,j}^2$$

a tedy $Q_{i,j}^2 \leq 1$ a proto $|Q_{i,j}| \leq 1$.

Ortogonální matice a zobrazení

- Ortogonální matice odpovídají zobrazením, které nemění délky ani úhly.

Věta 4.2

Ortogonální matice $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ splňuje:

- $\langle Qx, Qy\rangle = \langle x, y\rangle$ pro každé $x, y \in \mathbb{R}^n$,
- $\|Qx\| = \|x\|$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n$,
- $|Q_{i,j}| \leq 1$ a $|Q^{-1}_{i,j}| \leq 1$ pro každé $i, j = 1, \dots, n$.

Důkaz:

- $\langle Qx, Qy\rangle = (Qx)^\top Qy = x^\top Q^\top Qy = x^\top y = \langle x, y\rangle$.
- $\|Qx\| = \sqrt{\langle Qx, Qx\rangle} = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \|x\|$.
- Podle Tvrzení 4.1(6) je pro každé $j = 1, \dots, n$

$$1 = \|Q_{*,j}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} Q^2_{i,j}$$

a tedy $Q^2_{i,j} \leq 1$ a proto $|Q_{i,j}| \leq 1$. Matice Q^{-1} je ortogonální, tak pro ní tvrzení platí také.

Ortogonální matice a zobrazení

- Ortogonální matice odpovídají zobrazením, které nemění délky ani úhly.

Věta 4.2

Ortogonální matice $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ splňuje:

- $\langle Qx, Qy \rangle = \langle x, y \rangle$ pro každé $x, y \in \mathbb{R}^n$,
- $\|Qx\| = \|x\|$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n$,
- $|Q_{i,j}| \leq 1$ a $|Q^{-1}_{i,j}| \leq 1$ pro každé $i, j = 1, \ldots, n$.

Důkaz:

- $\langle Qx, Qy \rangle = (Qx)^\top Qy = x^\top Q^\top Qy = x^\top y = \langle x, y \rangle$.
- $\|Qx\| = \sqrt{\langle Qx, Qx \rangle} = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \|x\|$.
- Podle Tvrzení 4.1(6) je pro každé $j = 1, \ldots, n$

$$1 = \|Q_{*,j}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} Q^2_{i,j}$$

a tedy $Q^2_{i,j} \leq 1$ a proto $|Q_{i,j}| \leq 1$. Matice Q^{-1} je ortogonální, tak pro ní tvrzení platí také. $\square$

Ortogonální matice a zobrazení

Ortogonální matice a zobrazení

- To platí i obráceně: matice zobrazení zachovávajícího (libovolný) skalární součin musí být nutně ortogonální.

Ortogonální matice a zobrazení

- To platí i obráceně: matice zobrazení zachovávajícího (libovolný) skalární součin musí být nutně ortogonální. Analogicky toto platí i pro indukovanou normu podle polarizační identity.

Ortogonální matice a zobrazení

- To platí i obráceně: matice zobrazení zachovávajícího (libovolný) skalární součin musí být nutně ortogonální. Analogicky toto platí i pro indukovanou normu podle polarizační identity.

Věta 4.3

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad $\mathbb{R}$ s libovolným skalárním součinem a $f: U \to V$ je lineární zobrazení. Mějme ortonormální báze B_U pro U a B_V pro V. Pak ${}_{B_V}[f]_{B_U}$ je ortogonální právě tehdy, když $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ pro každé $x, y \in U$.

Ortogonální matice a zobrazení

- To platí i obráceně: matice zobrazení zachovávajícího (libovolný) skalární součin musí být nutně ortogonální. Analogicky toto platí i pro indukovanou normu podle polarizační identity.

Věta 4.3

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad $\mathbb{R}$ s libovolným skalárním součinem a $f : U \to V$ je lineární zobrazení. Mějme ortonormální báze B_U pro U a B_V pro V. Pak ${}_{B_V}[f]_{B_U}$ je ortogonální právě tehdy, když $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ pro každé $x, y \in U$.

Důkaz ($\Rightarrow$):

Ortogonální matice a zobrazení

- To platí i obráceně: matice zobrazení zachovávajícího (libovolný) skalární součin musí být nutně ortogonální. Analogicky toto platí i pro indukovanou normu podle polarizační identity.

Věta 4.3

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad $\mathbb{R}$ s libovolným skalárním součinem a $f : U \to V$ je lineární zobrazení. Mějme ortonormální báze B_U pro U a B_V pro V. Pak ${}_{B_V}[f]_{B_U}$ je ortogonální právě tehdy, když $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ pro každé $x, y \in U$.

Důkaz ($\Rightarrow$): Už víme, že $\langle x, y \rangle = [x]_{B_U}^\top \cdot [y]_{B_U}$ a

Ortogonální matice a zobrazení

- To platí i obráceně: matice zobrazení zachovávajícího (libovolný) skalární součin musí být nutně ortogonální. Analogicky toto platí i pro indukovanou normu podle polarizační identity.

Věta 4.3

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad $\mathbb{R}$ s libovolným skalárním součinem a $f : U \to V$ je lineární zobrazení. Mějme ortonormální báze B_U pro U a B_V pro V. Pak ${}_{B_V}[f]_{B_U}$ je ortogonální právě tehdy, když $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ pro každé $x, y \in U$.

Důkaz ($\Rightarrow$): Už víme, že $\langle x, y\rangle = [x]_{B_U}^\top \cdot [y]_{B_U}$ a

$$\begin{aligned}\langle f(x), f(y)\rangle &= [f(x)]_{B_V}^\top \cdot [f(y)]_{B_V} = \left({}_{B_V}[f]_{B_U} \cdot [x]_{B_U}\right)^\top \cdot {}_{B_V}[f]_{B_U} \cdot [y]_{B_U} \\ &= [x]_{B_U}^\top \cdot {}_{B_V}[f]_{B_U}^\top \cdot {}_{B_V}[f]_{B_U} \cdot [y]_{B_U}.\end{aligned}$$

Ortogonální matice a zobrazení

- To platí i obráceně: matice zobrazení zachovávajícího (libovolný) skalární součin musí být nutně ortogonální. Analogicky toto platí i pro indukovanou normu podle polarizační identity.

Věta 4.3

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad $\mathbb{R}$ s libovolným skalárním součinem a $f : U \to V$ je lineární zobrazení. Mějme ortonormální báze B_U pro U a B_V pro V. Pak ${}_{B_V}[f]_{B_U}$ je ortogonální právě tehdy, když $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ pro každé $x, y \in U$.

Důkaz ($\Rightarrow$): Už víme, že $\langle x, y\rangle = [x]_{B_U}^{\top} \cdot [y]_{B_U}$ a

$$\begin{aligned}\langle f(x), f(y)\rangle &= [f(x)]_{B_V}^{\top} \cdot [f(y)]_{B_V} = ({}_{B_V}[f]_{B_U} \cdot [x]_{B_U})^{\top} \cdot {}_{B_V}[f]_{B_U} \cdot [y]_{B_U} \\ &= [x]_{B_U}^{\top} \cdot {}_{B_V}[f]_{B_U}^{\top} \cdot {}_{B_V}[f]_{B_U} \cdot [y]_{B_U}.\end{aligned}$$

Tedy je-li ${}_{B_V}[f]_{B_U}$ ortogonální, pak $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.

Ortogonální matice a zobrazení

Věta 4.3

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad $\mathbb{R}$ s libovolným skalárním součinem a $f : U \to V$ je lineární zobrazení. Mějme ortonormální báze B_U pro U a B_V pro V. Pak ${}_{B_V}[f]_{B_U}$ je ortogonální právě tehdy, když $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ pro každé $x, y \in U$.

Ortogonální matice a zobrazení

Věta 4.3

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad $\mathbb{R}$ s libovolným skalárním součinem a $f : U \to V$ je lineární zobrazení. Mějme ortonormální báze B_U pro U a B_V pro V. Pak ${}_{B_V}[f]_{B_U}$ je ortogonální právě tehdy, když $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ pro každé $x, y \in U$.

Důkaz ($\Leftarrow$):

Ortogonální matice a zobrazení

Věta 4.3

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad $\mathbb{R}$ s libovolným skalárním součinem a $f: U \to V$ je lineární zobrazení. Mějme ortonormální báze B_U pro U a B_V pro V. Pak ${}_{B_V}[f]_{B_U}$ je ortogonální právě tehdy, když $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ pro každé $x, y \in U$.

Důkaz ($\Leftarrow$):
Pokud $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ pro každé $x, y \in U$, pak tato rovnost platí speciálně pro vektory, jejichž souřadnicemi jsou jednotkové vektory.

Ortogonální matice a zobrazení

Věta 4.3

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad $\mathbb{R}$ s libovolným skalárním součinem a $f : U \to V$ je lineární zobrazení. Mějme ortonormální báze B_U pro U a B_V pro V. Pak ${}_{B_V}[f]_{B_U}$ je ortogonální právě tehdy, když $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ pro každé $x, y \in U$.

Důkaz ($\Leftarrow$):

Pokud $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ pro každé $x, y \in U$, pak tato rovnost platí speciálně pro vektory, jejichž souřadnicemi jsou jednotkové vektory. Jsou-li x a y i-tý a j-tý vektor B_U, pak $[x]_{B_U} = e_i$ a $[y]_{B_U} = e_j$.

Ortogonální matice a zobrazení

Věta 4.3

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad $\mathbb{R}$ s libovolným skalárním součinem a $f: U \to V$ je lineární zobrazení. Mějme ortonormální báze B_U pro U a B_V pro V. Pak ${}_{B_V}[f]_{B_U}$ je ortogonální právě tehdy, když $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ pro každé $x, y \in U$.

Důkaz ($\Leftarrow$):

Pokud $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ pro každé $x, y \in U$, pak tato rovnost platí speciálně pro vektory, jejichž souřadnicemi jsou jednotkové vektory.

Jsou-li x a y i-tý a j-tý vektor B_U, pak $[x]_{B_U} = e_i$ a $[y]_{B_U} = e_j$.

Po složkách pak dostaneme $I_n = {}_{B_V}[f]_{B_U}^{\top} \cdot {}_{B_V}[f]_{B_U}$, protože

Ortogonální matice a zobrazení

Věta 4.3

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad $\mathbb{R}$ s libovolným skalárním součinem a $f: U \to V$ je lineární zobrazení. Mějme ortonormální báze B_U pro U a B_V pro V. Pak ${}_{B_V}[f]_{B_U}$ je ortogonální právě tehdy, když $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ pro každé $x, y \in U$.

Důkaz ($\Leftarrow$):
Pokud $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ pro každé $x, y \in U$, pak tato rovnost platí speciálně pro vektory, jejichž souřadnicemi jsou jednotkové vektory.
Jsou-li x a y i-tý a j-tý vektor B_U, pak $[x]_{B_U} = e_i$ a $[y]_{B_U} = e_j$.
Po složkách pak dostaneme $I_n = {}_{B_V}[f]_{B_U}^\top \cdot {}_{B_V}[f]_{B_U}$, protože

$$\begin{aligned}
(I_n)_{i,j} = e_i^\top e_j = [x]_{B_U}^\top \cdot [y]_{B_U} &= \langle x, y\rangle = \langle f(x), f(y)\rangle \\
&= [x]_{B_U}^\top \cdot {}_{B_V}[f]_{B_U}^\top \cdot {}_{B_V}[f]_{B_U} \cdot [y]_{B_U} \\
&= e_i^\top \cdot {}_{B_V}[f]_{B_U}^\top \cdot {}_{B_V}[f]_{B_U} \cdot e_j = ({}_{B_V}[f]_{B_U}^\top \cdot {}_{B_V}[f]_{B_U})_{i,j}.
\end{aligned}$$

Ortogonální matice a zobrazení

Věta 4.3

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad $\mathbb{R}$ s libovolným skalárním součinem a $f : U \to V$ je lineární zobrazení. Mějme ortonormální báze B_U pro U a B_V pro V. Pak ${}_{B_V}[f]_{B_U}$ je ortogonální právě tehdy, když $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ pro každé $x, y \in U$.

Důkaz ($\Leftarrow$):

Pokud $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ pro každé $x, y \in U$, pak tato rovnost platí speciálně pro vektory, jejichž souřadnicemi jsou jednotkové vektory.

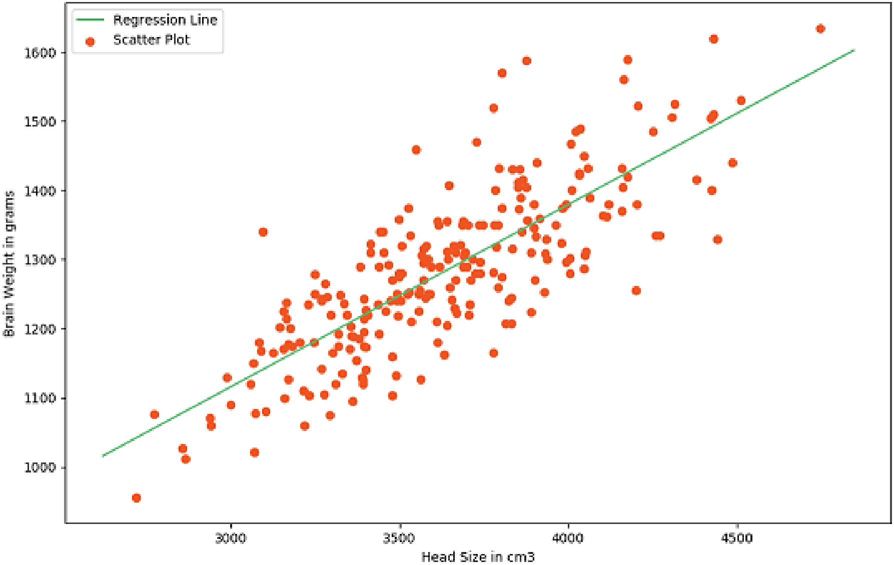
Jsou-li x a y i-tý a j-tý vektor B_U, pak $[x]_{B_U} = e_i$ a $[y]_{B_U} = e_j$.

Po složkách pak dostaneme $I_n = {}_{B_V}[f]_{B_U}^\top \cdot {}_{B_V}[f]_{B_U}$, protože

$$\begin{aligned}(I_n)_{i,j} = e_i^\top e_j = [x]_{B_U}^\top \cdot [y]_{B_U} &= \langle x, y\rangle = \langle f(x), f(y)\rangle \\ &= [x]_{B_U}^\top \cdot {}_{B_V}[f]_{B_U}^\top \cdot {}_{B_V}[f]_{B_U} \cdot [y]_{B_U} \\ &= e_i^\top \cdot {}_{B_V}[f]_{B_U}^\top \cdot {}_{B_V}[f]_{B_U} \cdot e_j = ({}_{B_V}[f]_{B_U}^\top \cdot {}_{B_V}[f]_{B_U})_{i,j}.\end{aligned}$$

$\square$

Metoda nejmenších čtverců



Zdroj: https://www.edureka.co/

Metoda nejmenších čtverců

Metoda nejmenších čtverců

- Další aplikace věty o projekci. Slouží např. k prokládání dat přímkou.

Metoda nejmenších čtverců

- Další aplikace věty o projekci. Slouží např. k prokládání dat přímkou.
- Mějme soustavu $Ax = b$, která nemá řešení.

Metoda nejmenších čtverců

- Další aplikace věty o projekci. Slouží např. k prokládání dat přímkou.
- Mějme soustavu $Ax = b$, která nemá řešení. Chceme aspoň nějakou aproximaci: vektor x tak, aby Ax a b byly co nejblíže. Neboli

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2^2$$

Metoda nejmenších čtverců

- Další aplikace věty o projekci. Slouží např. k prokládání dat přímkou.
- Mějme soustavu $Ax = b$, která nemá řešení. Chceme aspoň nějakou aproximaci: vektor x tak, aby Ax a b byly co nejblíže. Neboli

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2^2 = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^{n} (A_{j*}x - b_j)^2.$$

Metoda nejmenších čtverců

- Další aplikace věty o projekci. Slouží např. k prokládání dat přímkou.
- Mějme soustavu $Ax = b$, která nemá řešení. Chceme aspoň nějakou aproximaci: vektor x tak, aby Ax a b byly co nejblíže. Neboli

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2^2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^{n} (A_{j*}x - b_j)^2.$$

- Proto metoda nejmenších čtverců.

Věta 4.4

Pro $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $b \in \mathbb{R}^m$ je množina řešení soustavy $Ax = b$ metodou nejmenších čtverců neprázdná a rovná množině řešení soustavy $A^\top Ax = A^\top b$.

Metoda nejmenších čtverců

- Další aplikace věty o projekci. Slouží např. k prokládání dat přímkou.
- Mějme soustavu $Ax = b$, která nemá řešení. Chceme aspoň nějakou aproximaci: vektor x tak, aby Ax a b byly co nejblíže. Neboli

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2^2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^{n} (A_{j*}x - b_j)^2.$$

- Proto metoda nejmenších čtverců.

Věta 4.4

Pro $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $b \in \mathbb{R}^m$ je množina řešení soustavy $Ax = b$ metodou nejmenších čtverců neprázdná a rovná množině řešení soustavy $A^\top Ax = A^\top b$.

Důkaz:

Metoda nejmenších čtverců

- Další aplikace věty o projekci. Slouží např. k prokládání dat přímkou.
- Mějme soustavu $Ax = b$, která nemá řešení. Chceme aspoň nějakou aproximaci: vektor x tak, aby Ax a b byly co nejblíže. Neboli

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2^2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^{n} (A_{j*}x - b_j)^2.$$

- Proto metoda nejmenších čtverců.

Věta 4.4

Pro $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $b \in \mathbb{R}^m$ je množina řešení soustavy $Ax = b$ metodou nejmenších čtverců neprázdná a rovná množině řešení soustavy $A^\top Ax = A^\top b$.

Důkaz: Chceme projekci vektoru b do $\mathcal{S}(A)$ tvaru Ax.

Metoda nejmenších čtverců

- Další aplikace věty o projekci. Slouží např. k prokládání dat přímkou.
- Mějme soustavu $Ax = b$, která nemá řešení. Chceme aspoň nějakou aproximaci: vektor x tak, aby Ax a b byly co nejblíže. Neboli

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2^2 = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^{n} (A_{j*}x - b_j)^2.$$

- Proto metoda nejmenších čtverců.

Věta 4.4

Pro $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a $b \in \mathbb{R}^m$ je množina řešení soustavy $Ax = b$ metodou nejmenších čtverců neprázdná a rovná množině řešení soustavy $A^\top Ax = A^\top b$.

Důkaz: Chceme projekci vektoru b do $\mathcal{S}(A)$ tvaru Ax. Podle Věty 3.1 je Ax projekcí právě tehdy, když $Ax - b \in \mathcal{S}(A)^\perp = \mathrm{Ker}(A^\top)$.

Metoda nejmenších čtverců

- Další aplikace věty o projekci. Slouží např. k prokládání dat přímkou.
- Mějme soustavu $Ax = b$, která nemá řešení. Chceme aspoň nějakou aproximaci: vektor x tak, aby Ax a b byly co nejblíže. Neboli

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2^2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^{n} (A_{j*}x - b_j)^2.$$

- Proto metoda nejmenších čtverců.

Věta 4.4

Pro $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $b \in \mathbb{R}^m$ je množina řešení soustavy $Ax = b$ metodou nejmenších čtverců neprázdná a rovná množině řešení soustavy $A^\top Ax = A^\top b$.

Důkaz: Chceme projekci vektoru b do $\mathcal{S}(A)$ tvaru Ax. Podle Věty 3.1 je Ax projekcí právě tehdy, když $Ax - b \in \mathcal{S}(A)^\perp = \mathrm{Ker}(A^\top)$. Tedy musí platit $A^\top(Ax - b) = 0$, neboli $A^\top Ax = A^\top b$.

Metoda nejmenších čtverců

- Další aplikace věty o projekci. Slouží např. k prokládání dat přímkou.
- Mějme soustavu $Ax = b$, která nemá řešení. Chceme aspoň nějakou aproximaci: vektor x tak, aby Ax a b byly co nejblíže. Neboli

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2^2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^{n} (A_{j*}x - b_j)^2.$$

- Proto metoda nejmenších čtverců.

Věta 4.4

Pro $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $b \in \mathbb{R}^m$ je množina řešení soustavy $Ax = b$ metodou nejmenších čtverců neprázdná a rovná množině řešení soustavy $A^\top Ax = A^\top b$.

Důkaz: Chceme projekci vektoru b do $\mathcal{S}(A)$ tvaru Ax. Podle Věty 3.1 je Ax projekcí právě tehdy, když $Ax - b \in \mathcal{S}(A)^\perp = \mathrm{Ker}(A^\top)$. Tedy musí platit $A^\top(Ax - b) = 0$, neboli $A^\top Ax = A^\top b$. Tato soustava má řešení, protože pojekce musí existovat.

Metoda nejmenších čtverců

- Další aplikace věty o projekci. Slouží např. k prokládání dat přímkou.
- Mějme soustavu $Ax = b$, která nemá řešení. Chceme aspoň nějakou aproximaci: vektor x tak, aby Ax a b byly co nejblíže. Neboli

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2^2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^{n} (A_{j*}x - b_j)^2.$$

- Proto metoda nejmenších čtverců.

Věta 4.4

Pro $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $b \in \mathbb{R}^m$ je množina řešení soustavy $Ax = b$ metodou nejmenších čtverců neprázdná a rovná množině řešení soustavy $A^\top Ax = A^\top b$.

Důkaz: Chceme projekci vektoru b do $\mathcal{S}(A)$ tvaru Ax. Podle Věty 3.1 je Ax projekcí právě tehdy, když $Ax - b \in \mathcal{S}(A)^\perp = \mathrm{Ker}(A^\top)$. Tedy musí platit $A^\top(Ax - b) = 0$, neboli $A^\top Ax = A^\top b$. Tato soustava má řešení, protože pojekce musí existovat. $\square$

Metoda nejmenších čtverců

- Další aplikace věty o projekci. Slouží např. k prokládání dat přímkou.
- Mějme soustavu $Ax = b$, která nemá řešení. Chceme aspoň nějakou aproximaci: vektor x tak, aby Ax a b byly co nejblíže. Neboli

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2^2 = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^{n} (A_{j*}x - b_j)^2.$$

- Proto metoda nejmenších čtverců.

Věta 4.4

Pro $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a $b \in \mathbb{R}^m$ je množina řešení soustavy $Ax = b$ metodou nejmenších čtverců neprázdná a rovná množině řešení soustavy $A^\top Ax = A^\top b$.

Důkaz: Chceme projekci vektoru b do $\mathcal{S}(A)$ tvaru Ax. Podle Věty 3.1 je Ax projekcí právě tehdy, když $Ax - b \in \mathcal{S}(A)^\perp = \mathrm{Ker}(A^\top)$. Tedy musí platit $A^\top(Ax - b) = 0$, neboli $A^\top Ax = A^\top b$. Tato soustava má řešení, protože pojekce musí existovat. $\square$

- Je-li $\mathrm{rank}(A) = n$, pak je $A^\top A$ regulární a řešení je právě jedno.

Metoda nejmenších čtverců: aplikace

Metoda nejmenších čtverců: aplikace

- Řada aplikací napříč obory.

Metoda nejmenších čtverců: aplikace

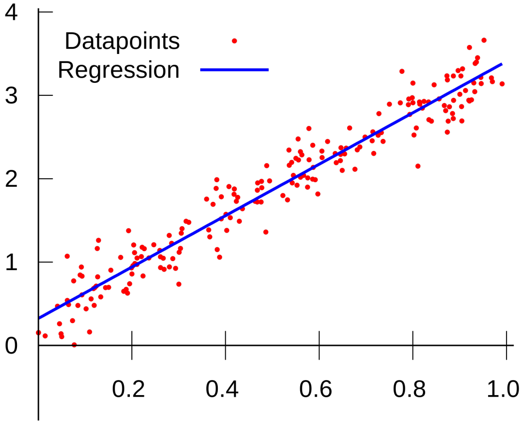
- Řada aplikací napříč obory.
- Lineární regrese: metoda pro proložení bodů v grafu (dat) přímkou.

Metoda nejmenších čtverců: aplikace

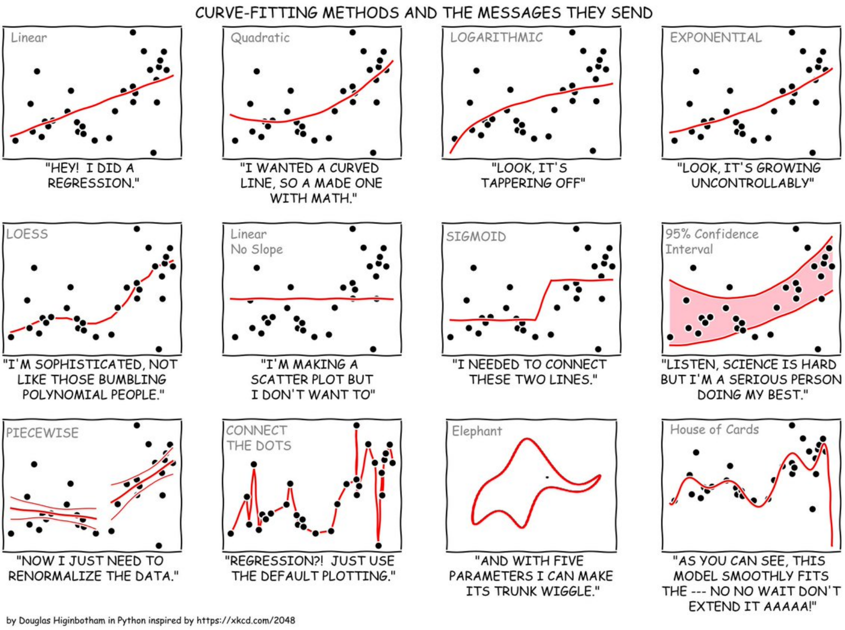
- Řada aplikací napříč obory.
- Lineární regrese: metoda pro proložení bodů v grafu (dat) přímkou.
- Za každý bod (x_i, y_i) máme pro přímku $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = ax + b\}$ rovnost $y_i = ax_i + b$ s proměnnými a, b.

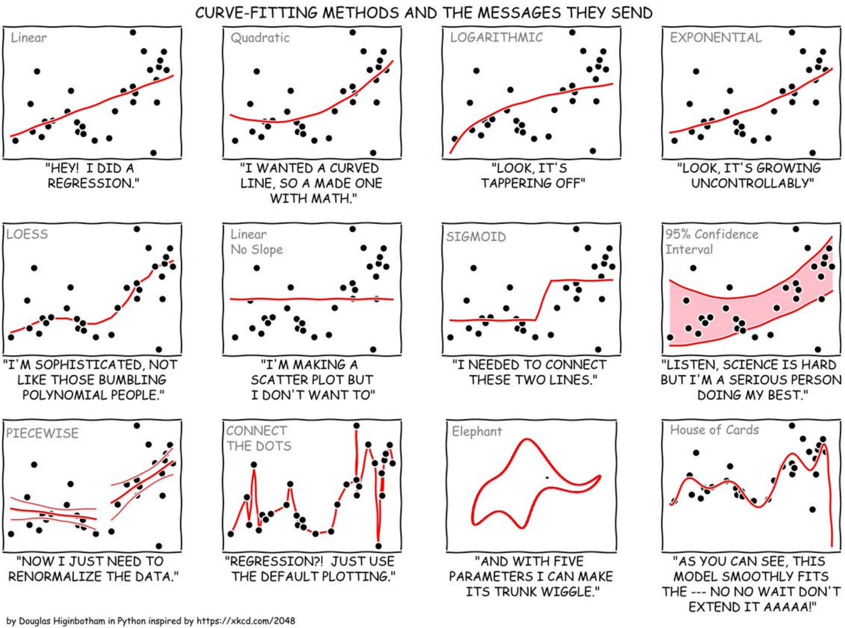
Metoda nejmenších čtverců: aplikace

- Řada aplikací napříč obory.
- Lineární regrese: metoda pro proložení bodů v grafu (dat) přímkou.
- Za každý bod (x_i, y_i) máme pro přímku $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = ax + b\}$ rovnost $y_i = ax_i + b$ s proměnnými a, b.



Zdroj: https://cs.wikipedia.org/


CURVE-FITTING METHODS AND THE MESSAGES THEY SEND
Linear
"HEY! I DID A REGRESSION."
Quadratic
"I WANTED A CURVED LINE, SO A MADE ONE WITH MATH."
LOGARITHMIC
"LOOK, IT'S TAPPERING OFF"
EXPONENTIAL
"LOOK, IT'S GROWING UNCONTROLLABLY"
LOESS
"I'M SOPHISTICATED, NOT LIKE THOSE BUMBLING POLYNOMIAL PEOPLE."
Linear No Slope
"I'M MAKING A SCATTER PLOT BUT I DON'T WANT TO"
SIGMOID
"I NEEDED TO CONNECT THESE TWO LINES."
95% Confidence Interval
"LISTEN, SCIENCE IS HARD BUT I'M A SERIOUS PERSON DOING MY BEST."
PIECEWISE
"NOW I JUST NEED TO RENORMALIZE THE DATA."
CONNECT THE DOTS
"REGRESSION?! JUST USE THE DEFAULT PLOTTING."
Elephant
"AND WITH FIVE PARAMETERS I CAN MAKE ITS TRUNK WIGGLE."
House of Cards
"AS YOU CAN SEE, THIS MODEL SMOOTHLY FITS THE --- NO NO WAIT DON'T EXTEND IT AAAAA!"
by Douglas Higinbotham in Python inspired by https://xkcd.com/2048



Děkuji za pozornost.