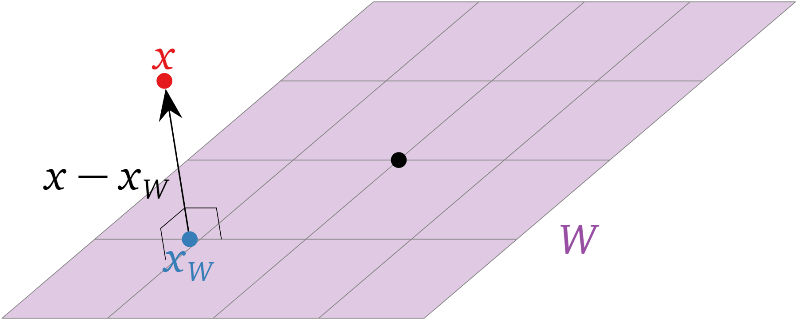
Lineární algebra 2

Martin Balko

3. přednáška

28. února 2022

Ortogonální projekce



Zdroj: https://textbooks.math.gatech.edu/

Výpočet ortogonální projekce: obecně

Výpočet ortogonální projekce: obecně

- Najdeme projekci x_U vektoru $x = (1, 2, 8)^\top$ do podprostoru
$$U = \operatorname{span}\{(1, 1, 0)^\top, (3, 2, 0)^\top\}.$$

Výpočet ortogonální projekce: obecně

- Najdeme projekci x_U vektoru $x = (1, 2, 8)^\top$ do podprostoru

$$U = \mathrm{span}\{(1, 1, 0)^\top, (3, 2, 0)^\top\}.$$

- Nejdřív spočteme ortonormální bázi U.

Výpočet ortogonální projekce: obecně

- Najdeme projekci x_U vektoru $x = (1,2,8)^\top$ do podprostoru
$$U = \mathrm{span}\{(1,1,0)^\top, (3,2,0)^\top\}.$$
- Nejdřív spočteme ortonormální bázi U. Tou je
$z_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^\top, z_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right)^\top.$

Výpočet ortogonální projekce: obecně

- Najdeme projekci x_U vektoru $x = (1, 2, 8)^\top$ do podprostoru
$$U = \mathrm{span}\{(1, 1, 0)^\top, (3, 2, 0)^\top\}.$$
- Nejdřív spočteme ortonormální bázi U. Tou je $z_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^\top, z_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right)^\top$.
- Nyní podle vzorce máme

$$x_U = \langle x, z_1 \rangle z_1 + \langle x, z_2 \rangle z_2$$

Výpočet ortogonální projekce: obecně

- Najdeme projekci x_U vektoru $x = (1, 2, 8)^\top$ do podprostoru
$$U = \mathrm{span}\{(1, 1, 0)^\top, (3, 2, 0)^\top\}.$$
- Nejdřív spočteme ortonormální bázi U. Tou je
$z_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^\top$, $z_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right)^\top$.
- Nyní podle vzorce máme
$$x_U = \langle x, z_1 \rangle z_1 + \langle x, z_2 \rangle z_2 = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)^\top + \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)^\top$$

Výpočet ortogonální projekce: obecně

- Najdeme projekci x_U vektoru $x = (1,2,8)^\top$ do podprostoru
$$U = \mathrm{span}\{(1,1,0)^\top, (3,2,0)^\top\}.$$
- Nejdřív spočteme ortonormální bázi U. Tou je $z_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^\top, z_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right)^\top$.
- Nyní podle vzorce máme
$$x_U = \langle x, z_1\rangle z_1 + \langle x, z_2\rangle z_2 = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)^\top + \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)^\top = (1,2,0)^\top.$$

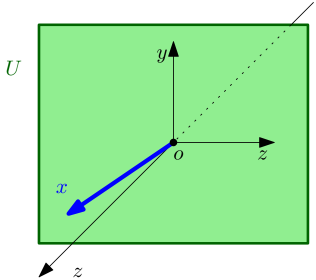
Výpočet ortogonální projekce: obecně

- Najdeme projekci x_U vektoru $x = (1,2,8)^\top$ do podprostoru

$$U = \mathrm{span}\{(1,1,0)^\top, (3,2,0)^\top\}.$$

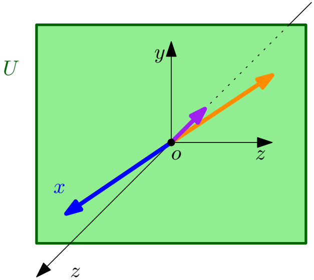
- Nejdřív spočteme ortonormální bázi U. Tou je
$z_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^\top$, $z_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right)^\top$.
- Nyní podle vzorce máme

$$x_U = \langle x, z_1\rangle z_1 + \langle x, z_2\rangle z_2 = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)^\top + \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)^\top = (1,2,0)^\top.$$



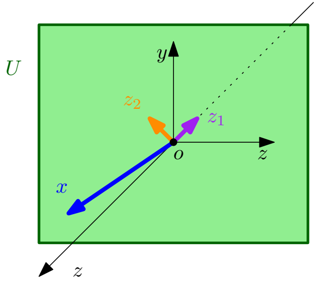
Výpočet ortogonální projekce: obecně

- Najdeme projekci x_U vektoru $x = (1,2,8)^\top$ do podprostoru
$$U = \operatorname{span}\{(1,1,0)^\top, (3,2,0)^\top\}.$$
- Nejdřív spočteme ortonormální bázi U. Tou je
$z_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^\top, z_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right)^\top.$
- Nyní podle vzorce máme
$$x_U = \langle x, z_1\rangle z_1 + \langle x, z_2\rangle z_2 = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)^\top + \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)^\top = (1,2,0)^\top.$$



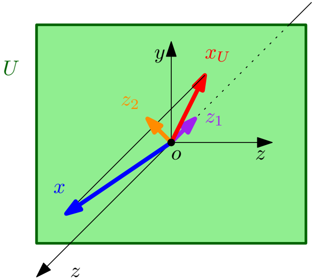
Výpočet ortogonální projekce: obecně

- Najdeme projekci x_U vektoru $x = (1,2,8)^\top$ do podprostoru
$$U = \mathrm{span}\{(1,1,0)^\top, (3,2,0)^\top\}.$$
- Nejdřív spočteme ortonormální bázi U. Tou je $z_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^\top, z_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right)^\top$.
- Nyní podle vzorce máme
$$x_U = \langle x, z_1\rangle z_1 + \langle x, z_2\rangle z_2 = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)^\top + \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)^\top = (1,2,0)^\top.$$



Výpočet ortogonální projekce: obecně

- Najdeme projekci x_U vektoru $x = (1,2,8)^\top$ do podprostoru
$$U = \mathrm{span}\{(1,1,0)^\top, (3,2,0)^\top\}.$$
- Nejdřív spočteme ortonormální bázi U. Tou je
$z_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^\top$, $z_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right)^\top$.
- Nyní podle vzorce máme
$$x_U = \langle x, z_1\rangle z_1 + \langle x, z_2\rangle z_2 = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)^\top + \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)^\top = (1,2,0)^\top.$$



Aplikace: Legendreovy polynomy

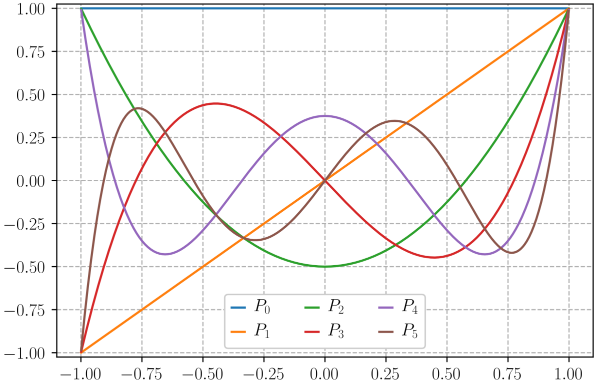
Aplikace: Legendreovy polynomy

- V prostoru $\mathcal{P}^n$ lze uvážit standardní skalární součin prostoru $\mathcal{C}_{[-1,1]}$ a zortonormalizovat v něm bázi $1, x, \ldots, x^n$.

Aplikace: Legendreovy polynomy

- V prostoru $\mathcal{P}^n$ lze uvážit standardní skalární součin prostoru $\mathcal{C}_{[-1,1]}$ a zortonormalizovat v něm bázi $1, x, \ldots, x^n$.
- Pak dostaneme ortogonální bázi tvořenou Legendreovými polynomy

$$p_0(x) = 1, p_1(x) = x, p_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2}, p_3(x) = \frac{5x^3 - x}{5}, \ldots$$



Zdroj: https://en.wikipedia.org/

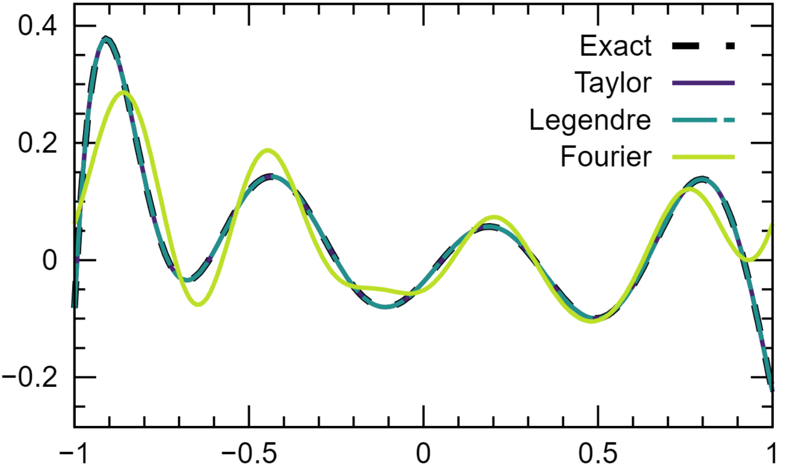
Aplikace: Legendreovy polynomy

Aplikace: Legendreovy polynomy

- Legendreovy polynomy mají mnoho aplikací.

Aplikace: Legendreovy polynomy

- Legendreovy polynomy mají mnoho aplikací.
- Například aproximace funkcí polynomy: ortogonální projekce funkce na tyto polynomy je její aproximací.



Zdroj: https://binhbar.com/

Aplikace: Legendreovy polynomy

Aplikace: Legendreovy polynomy

- Používají se také ve strojovém učení (recurrent neural networks).

Zdroj: https://news.yale.edu/

Výpočet ortogonálního doplňku v $\mathbb{R}^n$

Výpočet ortogonálního doplňku v $\mathbb{R}^n$

- Najdeme ortogonální doplněk $V^\perp$ podprostoru

$$V = \operatorname{span}\{(1,2,3)^\top, (1,-1,0)^\top\}.$$

Výpočet ortogonálního doplňku v $\mathbb{R}^n$

- Najdeme ortogonální doplněk $V^\perp$ podprostoru

$$V = \operatorname{span}\{(1,2,3)^\top, (1,-1,0)^\top\}.$$

- Sestavíme matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Výpočet ortogonálního doplňku v $\mathbb{R}^n$

- Najdeme ortogonální doplněk $V^\perp$ podprostoru

$$V = \operatorname{span}\{(1,2,3)^\top, (1,-1,0)^\top\}.$$

- Sestavíme matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Nyní stačí najít bázi $V^\perp = \operatorname{Ker} A$.

Výpočet ortogonálního doplňku v $\mathbb{R}^n$

- Najdeme ortogonální doplněk $V^\perp$ podprostoru

$$V = \operatorname{span}\{(1,2,3)^\top, (1,-1,0)^\top\}.$$

- Sestavíme matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Nyní stačí najít bázi $V^\perp = \operatorname{Ker} A$. Tou je vektor $(1, 1, -1)^\top$.

Výpočet ortogonálního doplňku v $\mathbb{R}^n$

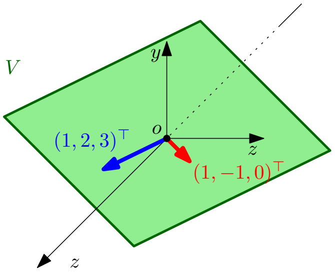
- Najdeme ortogonální doplněk $V^\perp$ podprostoru

$$V = \mathrm{span}\{(1,2,3)^\top, (1,-1,0)^\top\}.$$

- Sestavíme matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Nyní stačí najít bázi $V^\perp = \mathrm{Ker} A$. Tou je vektor $(1,1,-1)^\top$.



Výpočet ortogonálního doplňku v $\mathbb{R}^n$

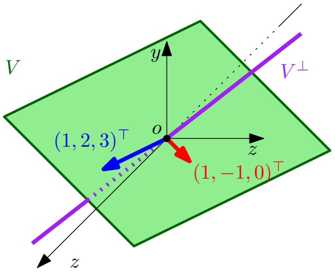
- Najdeme ortogonální doplněk $V^\perp$ podprostoru

$$V = \operatorname{span}\{(1,2,3)^\top, (1,-1,0)^\top\}.$$

- Sestavíme matici

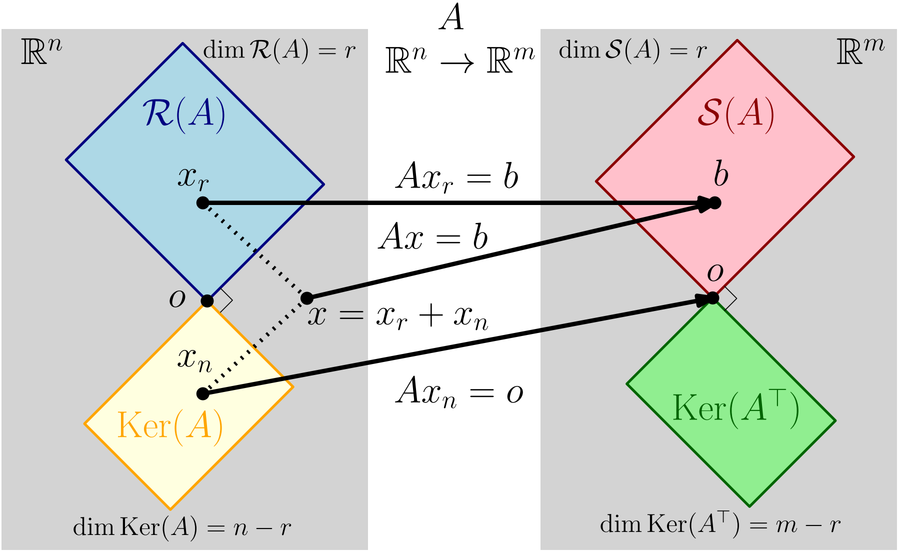
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Nyní stačí najít bázi $V^\perp = \operatorname{Ker} A$. Tou je vektor $(1,1,-1)^\top$.



$\mathrm{Ker}(A) = \mathcal{R}(A)^{\perp}$

$\mathrm{Ker}(A) = \mathcal{R}(A)^{\perp}$



$$Ax = A(x_r + x_n) = Ax_r + Ax_n = Ax_r$$

Výpočet ortogonální projekce v $\mathbb{R}^n$

Výpočet ortogonální projekce v $\mathbb{R}^n$

- Najdeme projekci x_U vektoru $x = (1, 2, 8)^\top$ do podprostoru

$$U = \mathrm{span}\{(1, 1, 0)^\top, (3, 2, 0)^\top\}.$$

Výpočet ortogonální projekce v $\mathbb{R}^n$

- Najdeme projekci x_U vektoru $x = (1, 2, 8)^\top$ do podprostoru
$$U = \mathrm{span}\{(1, 1, 0)^\top, (3, 2, 0)^\top\}.$$
- Sestavíme matici
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Výpočet ortogonální projekce v $\mathbb{R}^n$

- Najdeme projekci x_U vektoru $x = (1,2,8)^\top$ do podprostoru
$$U = \operatorname{span}\{(1,1,0)^\top, (3,2,0)^\top\}.$$
- Sestavíme matici
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
- Projekcí nyní je
$$x_U = A(A^\top A)^{-1} A^\top x$$

Výpočet ortogonální projekce v $\mathbb{R}^n$

- Najdeme projekci x_U vektoru $x = (1,2,8)^\top$ do podprostoru
$$U = \mathrm{span}\{(1,1,0)^\top, (3,2,0)^\top\}.$$
- Sestavíme matici
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
- Projekcí nyní je
$$x_U = A(A^\top A)^{-1} A^\top x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Výpočet ortogonální projekce v $\mathbb{R}^n$

- Najdeme projekci x_U vektoru $x = (1,2,8)^\top$ do podprostoru
$$U = \operatorname{span}\{(1,1,0)^\top, (3,2,0)^\top\}.$$
- Sestavíme matici
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
- Projekcí nyní je
$$x_U = A(A^\top A)^{-1}A^\top x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (1,2,0)^\top.$$

Výpočet ortogonální projekce v $\mathbb{R}^n$

- Najdeme projekci x_U vektoru $x = (1, 2, 8)^\top$ do podprostoru

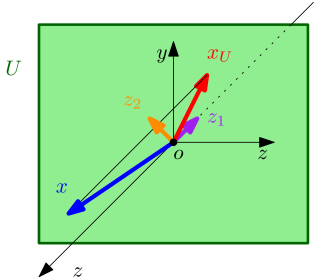
$$U = \operatorname{span}\{(1, 1, 0)^\top, (3, 2, 0)^\top\}.$$

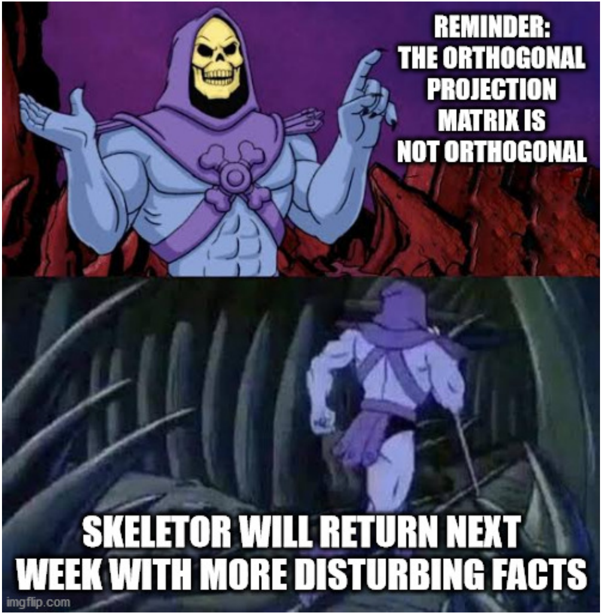
- Sestavíme matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

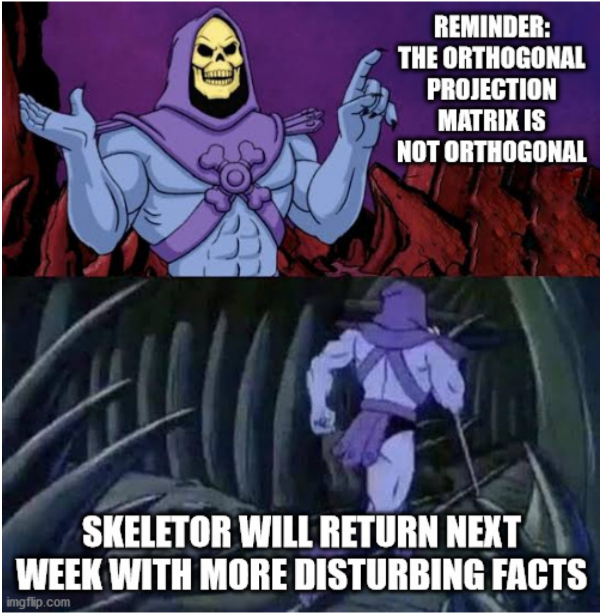
- Projekcí nyní je

$$x_U = A(A^\top A)^{-1} A^\top x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (1, 2, 0)^\top.$$





Zdroj: https://assets.nautil.us/



Zdroj: https://assets.nautil.us/

Děkuji za pozornost.