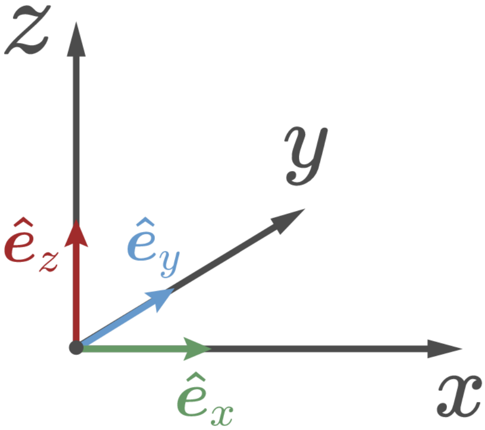
Lineární algebra 2

Martin Balko

2. přednáška

21. února 2022

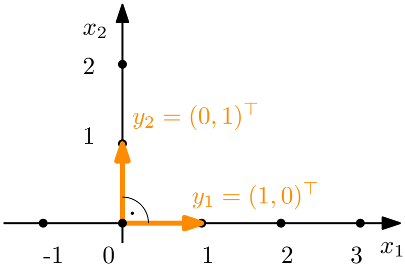
Ortonormální báze



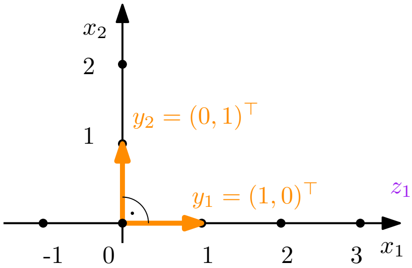
Zdroj: https://en.universaldenker.org/

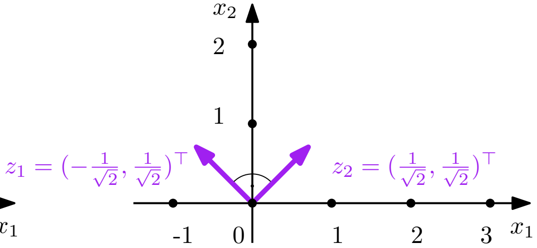
Ortonormální báze a Fourierovy koeficienty

Ortonormální báze a Fourierovy koeficienty

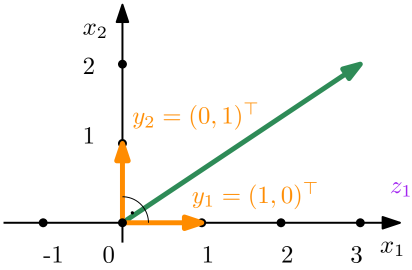


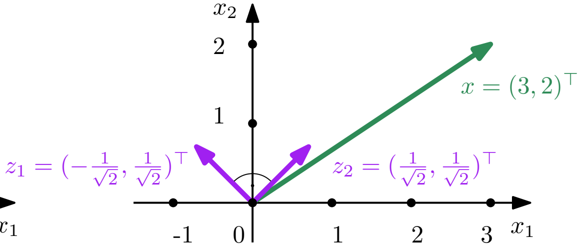
Ortonormální báze a Fourierovy koeficienty



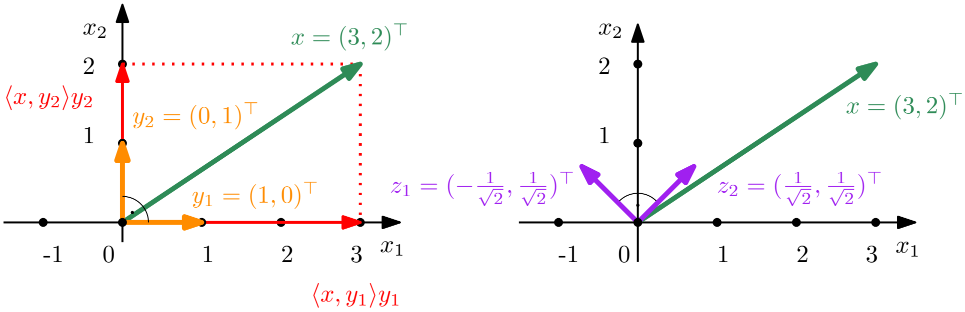


Ortonormální báze a Fourierovy koeficienty

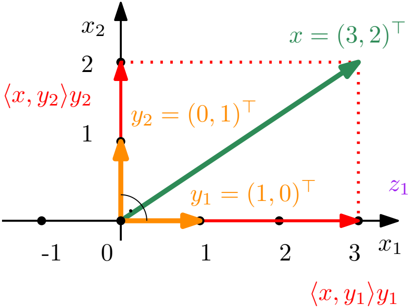


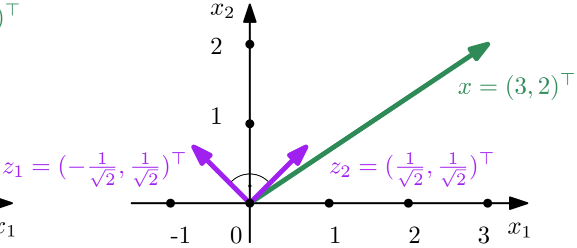


Ortonormální báze a Fourierovy koeficienty



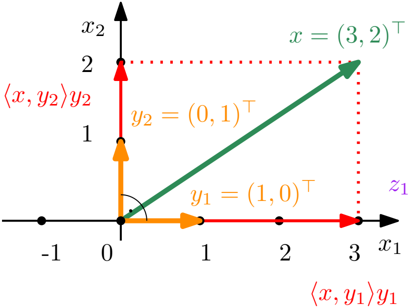
Ortonormální báze a Fourierovy koeficienty

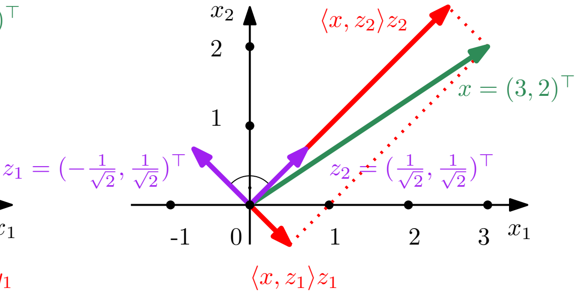




$x = \langle x, y_1\rangle y_1 + \langle x, y_2\rangle y_2 = 3y_1 + 2y_2$

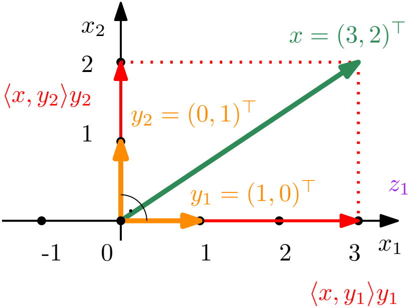
Ortonormální báze a Fourierovy koeficienty

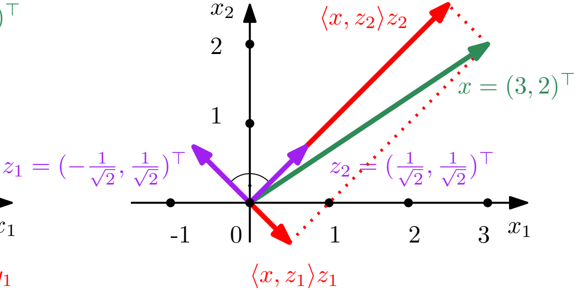




$x = \langle x, y_1\rangle y_1 + \langle x, y_2\rangle y_2 = 3y_1 + 2y_2$

Ortonormální báze a Fourierovy koeficienty





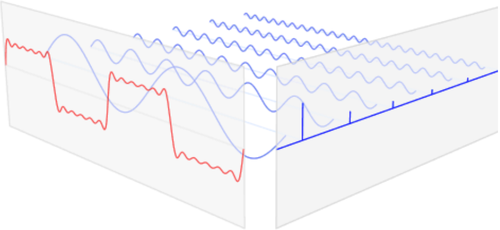
$$x = \langle x, y_1 \rangle y_1 + \langle x, y_2 \rangle y_2 = 3y_1 + 2y_2$$

$$x = \langle x, z_1 \rangle z_1 + \langle x, z_2 \rangle z_2 = \frac{-1}{\sqrt{2}} z_1 + \frac{5}{\sqrt{2}} z_2$$

Fourierův rozvoj

Fourierův rozvoj

- Fourier použil Fourierův rozvoj kolem roku 1807 pro řešení problému vedení tepla v pevných látkách.

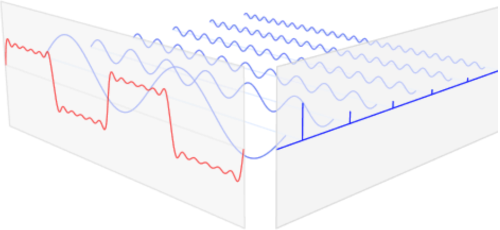


Obrázek: Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768–1830).

Zdroj:https://en.wikipedia.org

Fourierův rozvoj

- Fourier použil Fourierův rozvoj kolem roku 1807 pro řešení problému vedení tepla v pevných látkách.



Obrázek: Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768–1830).

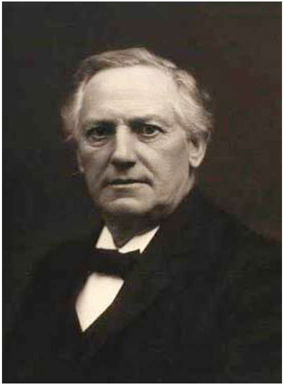
Zdroj:https://en.wikipedia.org

- Motivace pro jednu z nejpoužívanějších matematických aplikací (MP3 a JPEG komprese, magnetická rezonance, kvantová fyzika, ...).

Gramova–Schmidtova ortogonalizace

Gramova–Schmidtova ortogonalizace

- Algoritmus na vytvoření ortonormální báze z libovolné dané báze.

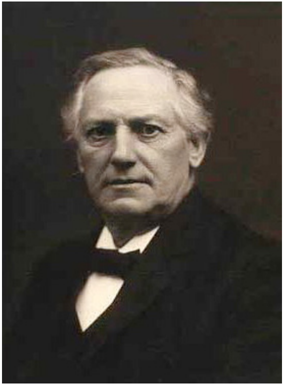


Obrázek: Jørgen Pedersen Gram (1850–1916) a Erhard Schmidt (1876–1959).

Zdroj: https://en.wikipedia.org

Gramova–Schmidtova ortogonalizace

- Algoritmus na vytvoření ortonormální báze z libovolné dané báze.



Obrázek: Jørgen Pedersen Gram (1850–1916) a Erhard Schmidt (1876–1959).

Zdroj: https://en.wikipedia.org

- Ukážeme si její příklad pomocí animace.

Zdroj: https://en.wikipedia.org

Aplikace: Fourierova transformace

Aplikace: Fourierova transformace

- V $\mathcal{C}_{[-\pi,\pi]}$ existuje ortonormální systém $z_1, z_2, \ldots$ tvořený vektory

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(2x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(3x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(3x)}{\sqrt{\pi}}, \ldots$$

Aplikace: Fourierova transformace

- V $\mathcal{C}_{[-\pi,\pi]}$ existuje ortonormální systém $z_1, z_2, \ldots$ tvořený vektory

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(2x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(3x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(3x)}{\sqrt{\pi}}, \ldots$$

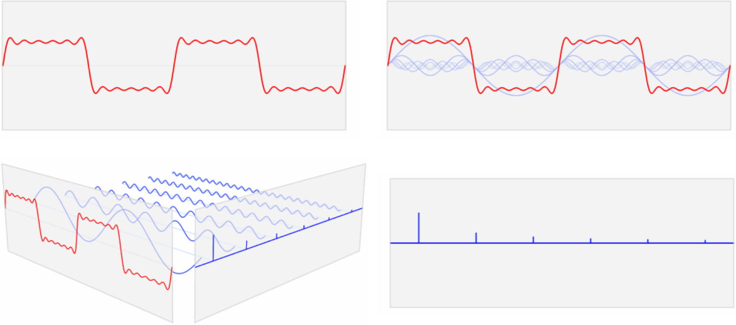
- Každou funkci $f \in \mathcal{C}_{[-\pi,\pi]}$ lze vyjádřit jako $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, z_i \rangle z_i$.

Aplikace: Fourierova transformace

- V $\mathcal{C}_{[-\pi,\pi]}$ existuje ortonormální systém $z_1, z_2, \ldots$ tvořený vektory

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(2x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(3x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(3x)}{\sqrt{\pi}}, \ldots$$

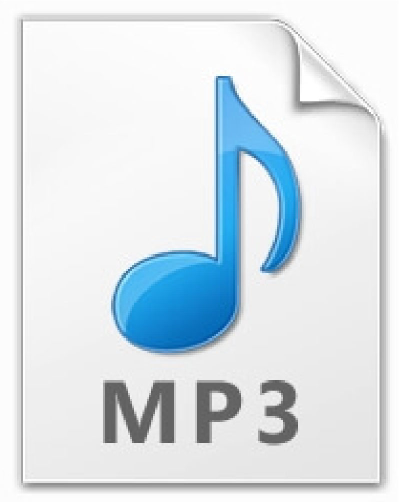
- Každou funkci $f \in \mathcal{C}_{[-\pi,\pi]}$ lze vyjádřit jako $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, z_i \rangle z_i$.
- Tedy složité funkce jde vyjádřit jednoduchými, což má spoustu aplikací.



Zdroj:https://en.wikipedia.org

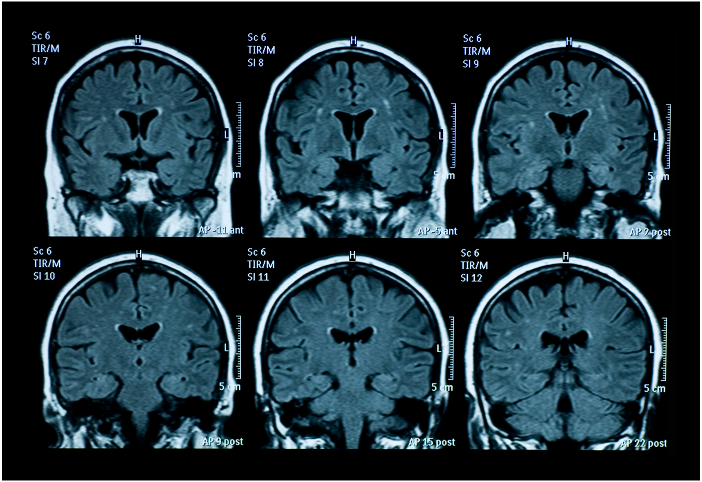
Obrázek: Aplikace: JPEG komprese.

Zdroj: https://laptrinhx.com/



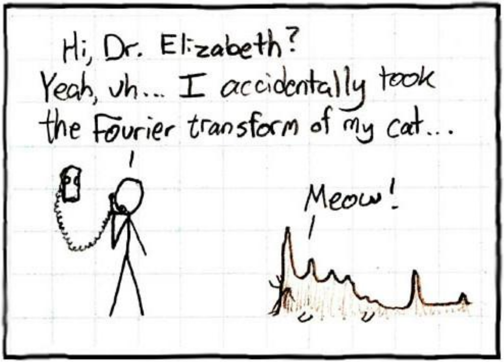
Obrázek: Aplikace: MP3 komprese.

Zdroj: https://www.javatpoint.com/

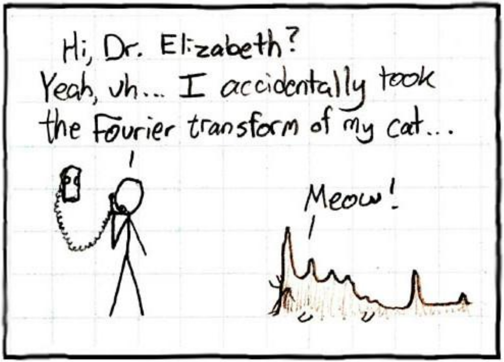


Obrázek: Aplikace: magnetická rezonance.

Zdroj: https://www.scientificamerican.com/



Zdroj: https://assets.nautil.us/



Zdroj: https://assets.nautil.us/

Děkuji za pozornost.