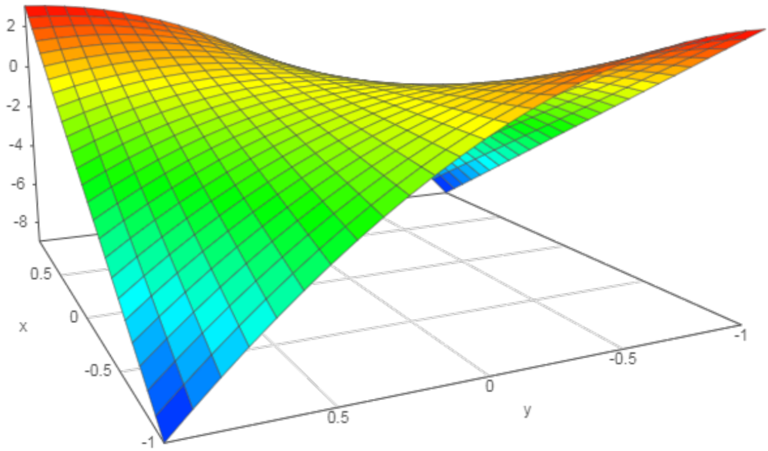
Lineární algebra 2

Martin Balko

14. přednáška

16. května 2022

Bilineární a kvadratické formy



Zdroj: https://kam.mff.cuni.cz/~fiala

Připomenutí z minula

Připomenutí z minula

- Bilineární forma na vektorovém prostoru V nad tělesem $\mathbb{T}$ je zobrazení $b\colon V \times V \to \mathbb{T}$, které je lineární v obou složkách.

Připomenutí z minula

- Bilineární forma na vektorovém prostoru V nad tělesem $\mathbb{T}$ je zobrazení $b\colon V \times V \to \mathbb{T}$, které je lineární v obou složkách. Forma b je symetrická, pokud $b(u, v) = b(v, u)$ pro každé $u, v \in V$.

Připomenutí z minula

- Bilineární forma na vektorovém prostoru V nad tělesem $\mathbb{T}$ je zobrazení $b\colon V \times V \to \mathbb{T}$, které je lineární v obou složkách. Forma b je symetrická, pokud $b(u, v) = b(v, u)$ pro každé $u, v \in V$.
- Zobecnění reálného skalárního součinu.

Připomenutí z minula

- Bilineární forma na vektorovém prostoru V nad tělesem $\mathbb{T}$ je zobrazení $b\colon V \times V \to \mathbb{T}$, které je lineární v obou složkách. Forma b je symetrická, pokud $b(u, v) = b(v, u)$ pro každé $u, v \in V$.
- Zobecnění reálného skalárního součinu.
- Kvadratická forma na V nad $\mathbb{T}$ je zobrazení $f\colon V \to \mathbb{T}$, pro které existuje symetrická bilineární forma b taková, že $f(u) = b(u, u)$ pro každé $u \in V$.

Připomenutí z minula

- Bilineární forma na vektorovém prostoru V nad tělesem $\mathbb{T}$ je zobrazení $b\colon V \times V \to \mathbb{T}$, které je lineární v obou složkách. Forma b je symetrická, pokud $b(u, v) = b(v, u)$ pro každé $u, v \in V$.
- Zobecnění reálného skalárního součinu.
- Kvadratická forma na V nad $\mathbb{T}$ je zobrazení $f\colon V \to \mathbb{T}$, pro které existuje symetrická bilineární forma b taková, že $f(u) = b(u, u)$ pro každé $u \in V$.

  Matice bilineární formy b vzhledem k bázi $B = \{w_1, \dots, w_n\}$ je matice $A \in \mathbb{T}^{n\times n}$, kde $A_{i,j} = b(w_i, w_j)$.

Připomenutí z minula

- Bilineární forma na vektorovém prostoru V nad tělesem $\mathbb{T}$ je zobrazení $b\colon V \times V \to \mathbb{T}$, které je lineární v obou složkách. Forma b je symetrická, pokud $b(u, v) = b(v, u)$ pro každé $u, v \in V$.
- Zobecnění reálného skalárního součinu.
- Kvadratická forma na V nad $\mathbb{T}$ je zobrazení $f\colon V \to \mathbb{T}$, pro které existuje symetrická bilineární forma b taková, že $f(u) = b(u, u)$ pro každé $u \in V$.

  Matice bilineární formy b vzhledem k bázi $B = \{w_1, \ldots, w_n\}$ je matice $A \in \mathbb{T}^{n\times n}$, kde $A_{i,j} = b(w_i, w_j)$.

  Matice kvadratické formy f je maticí bilineární formy indukující f.

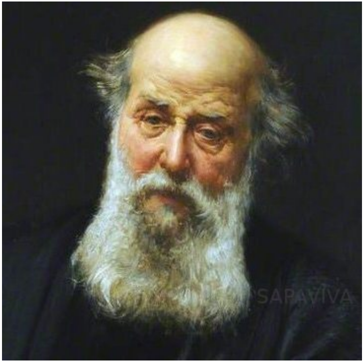
Připomenutí z minula

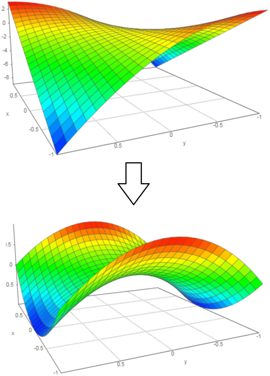
- Bilineární forma na vektorovém prostoru V nad tělesem $\mathbb{T}$ je zobrazení $b\colon V \times V \to \mathbb{T}$, které je lineární v obou složkách. Forma b je symetrická, pokud $b(u, v) = b(v, u)$ pro každé $u, v \in V$.
- Zobecnění reálného skalárního součinu.
- Kvadratická forma na V nad $\mathbb{T}$ je zobrazení $f\colon V \to \mathbb{T}$, pro které existuje symetrická bilineární forma b taková, že $f(u) = b(u, u)$ pro každé $u \in V$.
  Matice bilineární formy b vzhledem k bázi $B = \{w_1, \dots, w_n\}$ je matice $A \in \mathbb{T}^{n\times n}$, kde $A_{i,j} = b(w_i, w_j)$.
  Matice kvadratické formy f je maticí bilineární formy indukující f.
- Nahlédli jsme několik vlastností, například pro pevnou bázi existuje bijekce mezi bilineárními formami $V \times V \to \mathbb{T}$ a maticemi z $\mathbb{T}^{n\times n}$.

Sylvesterův zákon setrvačnosti

Sylvesterův zákon setrvačnosti

- Buď $f(x) = x^\top A x$ kvadratická forma na $\mathbb{R}^n$. Pak existuje báze, vůči níž má f diagonální matici s prvky $-1, 0, 1$. Navíc, tato matice je až na pořadí prvků jednoznačná.





Obrázek: James Joseph Sylvester (1814–1897).

Zdroje: https://www.sapaviva.com/ a https://kam.mff.cuni.cz/~fiala

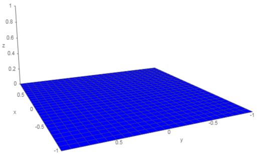
Kvadratické formy v $\mathbb{R}^2$

Kvadratické formy v $\mathbb{R}^2$

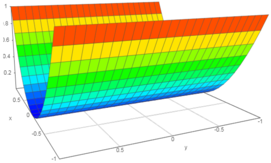
- Podle Sylvestrova zákona mají kvadratické formy v $\mathbb{R}^2$ v podstatě jeden z následujících tvarů v souřadném systému vhodné báze.

Kvadratické formy v $\mathbb{R}^2$

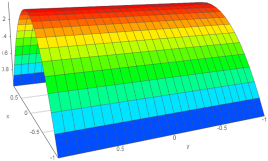
- Podle Sylvestrova zákona mají kvadratické formy v $\mathbb{R}^2$ v podstatě jeden z následujících tvarů v souřadném systému vhodné báze.



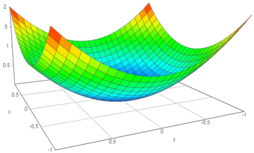
(a) 0



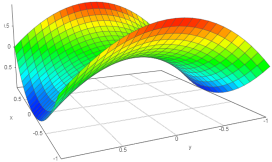
(b) x_1^2



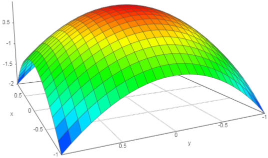
(c) $-x_1^2$



(d) $x_1^2 + x_2^2$



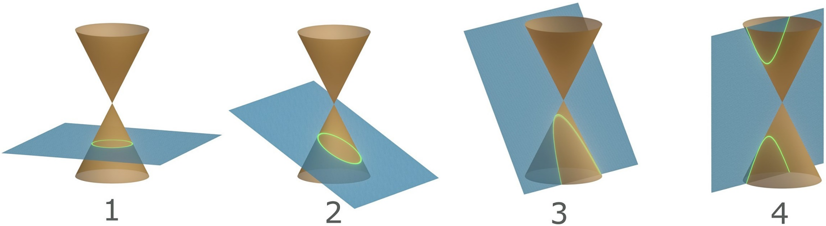
(e) $x_1^2 - x_2^2$



(f) $-x_1^2 - x_2^2$

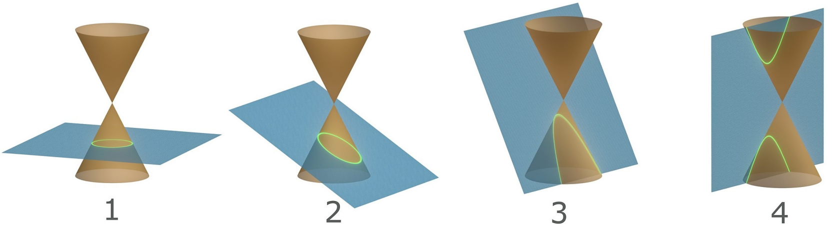
Zdroj: https://kam.mff.cuni.cz/~fiala

Kuželosečky a kvadriky



Zdroj: https://en.wikipedia.org/

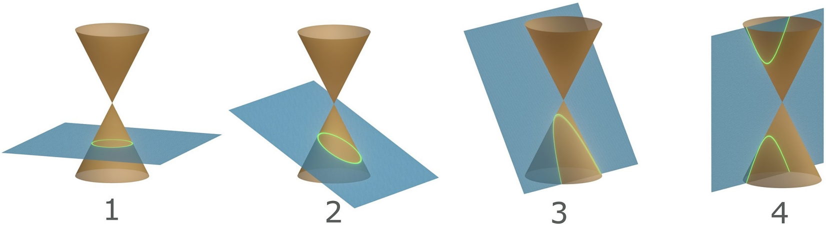
Kuželosečky a kvadriky



Zdroj: https://en.wikipedia.org/

- Nyní už máme metody, jak algebraicky popsat zajímavé objekty jako jsou kuželosečky (průniky roviny s rotační kuželovou plochou).

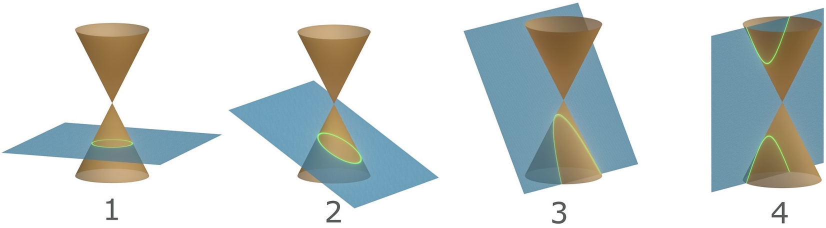
Kuželosečky a kvadriky



Zdroj: https://en.wikipedia.org/

- Nyní už máme metody, jak algebraicky popsat zajímavé objekty jako jsou kuželosečky (průniky roviny s rotační kuželovou plochou).
- Jedná se o kružnice, elipsy, paraboly a hyperboly.

Kuželosečky a kvadriky



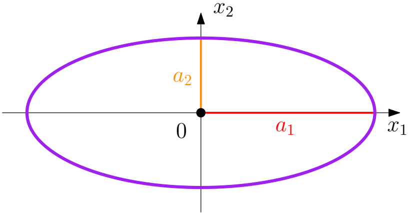
Zdroj: https://en.wikipedia.org/

- Nyní už máme metody, jak algebraicky popsat zajímavé objekty jako jsou kuželosečky (průniky roviny s rotační kuželovou plochou).
- Jedná se o kružnice, elipsy, paraboly a hyperboly.
- Obecněji, máme nástroje napráci s kvadrikami.

Transformace kvadriky: příklad (elipsoid)

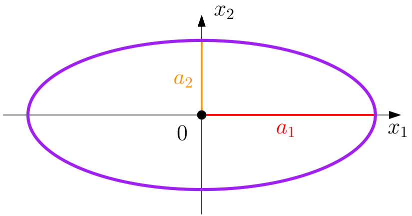
Transformace kvadriky: příklad (elipsoid)

- Elipsoid je množinou $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^2 \colon \frac{x_1^2}{a_1^2} + \cdots + \frac{x_n^2}{a_n^2} = 1\}$ pro $a_1, \ldots, a_n > 0$. Střed je v počátku, osy $x_1, \ldots, x_n$ mají délky $a_1, \ldots, a_n$.



Transformace kvadriky: příklad (elipsoid)

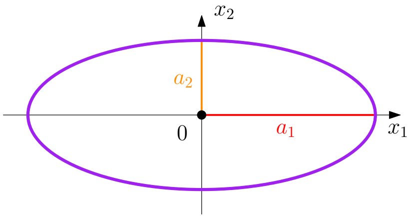
- Elipsoid je množinou $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^2 \colon \frac{x_1^2}{a_1^2} + \cdots + \frac{x_n^2}{a_n^2} = 1\}$ pro $a_1, \ldots, a_n > 0$. Střed je v počátku, osy $x_1, \ldots, x_n$ mají délky $a_1, \ldots, a_n$.



- Obecně máme $\{x \in \mathbb{R}^n \colon x^\top A x = 1\}$, kde A je pozitivně definitní.

Transformace kvadriky: příklad (elipsoid)

- Elipsoid je množinou $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^2 \colon \frac{x_1^2}{a_1^2} + \cdots + \frac{x_n^2}{a_n^2} = 1\}$ pro $a_1, \dots, a_n > 0$. Střed je v počátku, osy $x_1, \dots, x_n$ mají délky $a_1, \dots, a_n$.

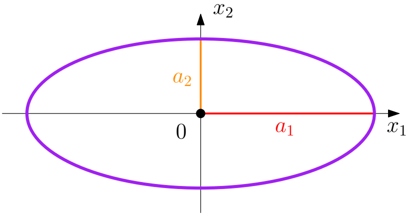


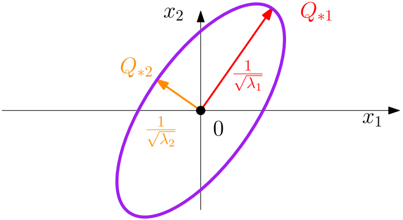
- Obecně máme $\{x \in \mathbb{R}^n \colon x^\top A x = 1\}$, kde A je pozitivně definitní.
- Do hezčího tvaru dostaneme elipsoid pomocí spektrálního rozkladu $A = Q\Lambda Q^\top$ a substitucí $y := Q^\top x$:

$$1 = x^\top A x = x^\top Q \Lambda Q^\top x = y^\top \Lambda y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^2}{(\lambda_i^{-1/2})^2}.$$

Transformace kvadriky: příklad (elipsoid)

- Elipsoid je množinou $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^2 \colon \frac{x_1^2}{a_1^2} + \dots + \frac{x_n^2}{a_n^2} = 1\}$ pro $a_1, \dots, a_n > 0$. Střed je v počátku, osy $x_1, \dots, x_n$ mají délky $a_1, \dots, a_n$.





- Obecně máme $\{x \in \mathbb{R}^n \colon x^\top A x = 1\}$, kde A je pozitivně definitní.
- Do hezčího tvaru dostaneme elipsoid pomocí spektrálního rozkladu $A = Q\Lambda Q^\top$ a substitucí $y := Q^\top x$:

$$1 = x^\top A x = x^\top Q \Lambda Q^\top x = y^\top \Lambda y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^2}{(\lambda_i^{-1/2})^2}.$$

Transformace kvadriky: příklad (parabola)

Transformace kvadriky: příklad (parabola)

- Mějme kvadriku
$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon 2x_1^2 - 8x_1x_2 + 8x_2^2 + (8\sqrt{5} - 4)x_1 - (16\sqrt{5} + 2)x_2 + 50 = 0\}.$

Transformace kvadriky: příklad (parabola)

- Mějme kvadriku $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon 2x_1^2 - 8x_1x_2 + 8x_2^2 + (8\sqrt{5} - 4)x_1 - (16\sqrt{5} + 2)x_2 + 50 = 0\}$. Uvidíme, že se jedná o parabolu $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 \colon z_2 = az_1^2 + b\}$.

Transformace kvadriky: příklad (parabola)

- Mějme kvadriku $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon 2x_1^2 - 8x_1x_2 + 8x_2^2 + (8\sqrt{5} - 4)x_1 - (16\sqrt{5} + 2)x_2 + 50 = 0\}$. Uvidíme, že se jedná o parabolu $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 \colon z_2 = az_1^2 + b\}$.
- Matice $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$ má spektrální rozklad $Q\Lambda Q^\top$ s $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$. Substitucí $y := Q^\top x = \left(\frac{x_1 - 2x_2}{\sqrt{5}}, \frac{2x_1 + x_2}{\sqrt{5}}\right)^\top$ provedeme rotaci os a máme $\{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \colon 10y_1^2 - 2\sqrt{5}y_2 + 40y_1 + 50 = 0\}$.

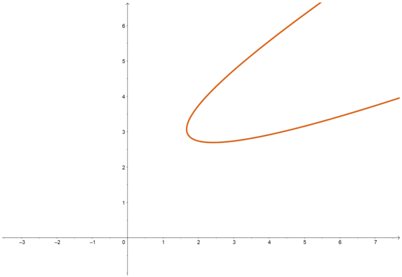
Transformace kvadriky: příklad (parabola)

- Mějme kvadriku $\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\colon 2x_1^2-8x_1x_2+8x_2^2+(8\sqrt{5}-4)x_1-(16\sqrt{5}+2)x_2+50=0\}$. Uvidíme, že se jedná o parabolu $\{(z_1,z_2)\in\mathbb{R}^2\colon z_2=az_1^2+b\}$.
- Matice $A=\begin{pmatrix}2&-4\\-4&8\end{pmatrix}$ má spektrální rozklad $Q\Lambda Q^\top$ s $Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{2}{\sqrt{5}}\\\frac{-2}{\sqrt{5}}&\frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$. Substitucí $y:=Q^\top x=(\frac{x_1-2x_2}{\sqrt{5}},\frac{2x_1+x_2}{\sqrt{5}})^\top$ provedeme rotaci os a máme $\{(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2\colon 10y_1^2-2\sqrt{5}y_2+40y_1+50=0\}$.
- Poté substitucí $z_1:=y_1+2$ a $z_2:=y_2$ provedeme horizontální posun a dostaneme parabolu $\{(z_1,z_2)\in\mathbb{R}^2\colon 10z_1^2-2\sqrt{5}z_2+10=0\}$.

Transformace kvadriky: příklad (parabola)

- Mějme kvadriku $\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\colon 2x_1^2-8x_1x_2+8x_2^2+(8\sqrt{5}-4)x_1-(16\sqrt{5}+2)x_2+50=0\}$. Uvidíme, že se jedná o parabolu $\{(z_1,z_2)\in\mathbb{R}^2\colon z_2=az_1^2+b\}$.
- Matice $A=\begin{pmatrix}2&-4\\-4&8\end{pmatrix}$ má spektrální rozklad $Q\Lambda Q^\top$ s $Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{2}{\sqrt{5}}\\\frac{-2}{\sqrt{5}}&\frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$.

  Substitucí $y:=Q^\top x=\left(\frac{x_1-2x_2}{\sqrt{5}},\frac{2x_1+x_2}{\sqrt{5}}\right)^\top$ provedeme rotaci os a máme $\{(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2\colon 10y_1^2-2\sqrt{5}y_2+40y_1+50=0\}$.
- Poté substitucí $z_1:=y_1+2$ a $z_2:=y_2$ provedeme horizontální posun a dostaneme parabolu $\{(z_1,z_2)\in\mathbb{R}^2\colon 10z_1^2-2\sqrt{5}z_2+10=0\}$.

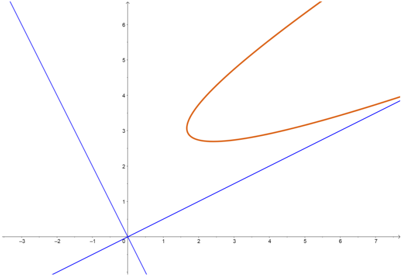


Zdroj: https://kam.mff.cuni.cz/~fiala

Transformace kvadriky: příklad (parabola)

- Mějme kvadriku $\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\colon 2x_1^2-8x_1x_2+8x_2^2+(8\sqrt{5}-4)x_1-(16\sqrt{5}+2)x_2+50=0\}$. Uvidíme, že se jedná o parabolu $\{(z_1,z_2)\in\mathbb{R}^2\colon z_2=az_1^2+b\}$.
- Matice $A=\begin{pmatrix}2 & -4\\ -4 & 8\end{pmatrix}$ má spektrální rozklad $Q\Lambda Q^\top$ s $Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$.

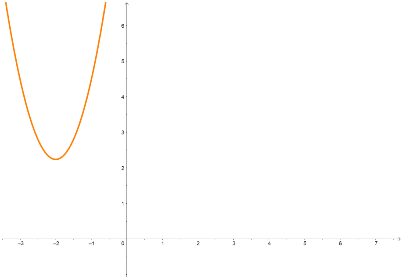
  Substitucí $y:=Q^\top x=\left(\frac{x_1-2x_2}{\sqrt{5}},\frac{2x_1+x_2}{\sqrt{5}}\right)^\top$ provedeme rotaci os a máme $\{(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2\colon 10y_1^2-2\sqrt{5}y_2+40y_1+50=0\}$.
- Poté substitucí $z_1:=y_1+2$ a $z_2:=y_2$ provedeme horizontální posun a dostaneme parabolu $\{(z_1,z_2)\in\mathbb{R}^2\colon 10z_1^2-2\sqrt{5}z_2+10=0\}$.



Zdroj: https://kam.mff.cuni.cz/~fiala

Transformace kvadriky: příklad (parabola)

- Mějme kvadriku $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon 2x_1^2 - 8x_1x_2 + 8x_2^2 + (8\sqrt{5} - 4)x_1 - (16\sqrt{5} + 2)x_2 + 50 = 0\}$. Uvidíme, že se jedná o parabolu $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 \colon z_2 = az_1^2 + b\}$.
- Matice $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$ má spektrální rozklad $Q\Lambda Q^\top$ s $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$. Substitucí $y := Q^\top x = (\frac{x_1 - 2x_2}{\sqrt{5}}, \frac{2x_1 + x_2}{\sqrt{5}})^\top$ provedeme rotaci os a máme $\{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \colon 10y_1^2 - 2\sqrt{5}y_2 + 40y_1 + 50 = 0\}$.
- Poté substitucí $z_1 := y_1 + 2$ a $z_2 := y_2$ provedeme horizontální posun a dostaneme parabolu $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 \colon 10z_1^2 - 2\sqrt{5}z_2 + 10 = 0\}$.

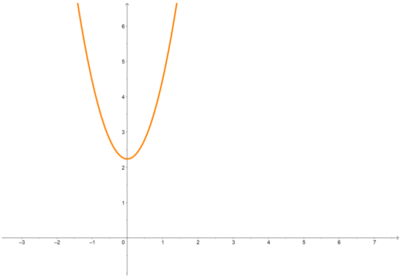


Zdroj: https://kam.mff.cuni.cz/~fiala

Transformace kvadriky: příklad (parabola)

- Mějme kvadriku $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\colon 2x_1^2 - 8x_1x_2 + 8x_2^2 + (8\sqrt{5} - 4)x_1 - (16\sqrt{5} + 2)x_2 + 50 = 0\}$. Uvidíme, že se jedná o parabolu $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2\colon z_2 = az_1^2 + b\}$.
- Matice $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$ má spektrální rozklad $Q\Lambda Q^\top$ s $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

  Substitucí $y := Q^\top x = \left(\frac{x_1 - 2x_2}{\sqrt{5}}, \frac{2x_1 + x_2}{\sqrt{5}}\right)^\top$ provedeme rotaci os a máme $\{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2\colon 10y_1^2 - 2\sqrt{5}y_2 + 40y_1 + 50 = 0\}$.
- Poté substitucí $z_1 := y_1 + 2$ a $z_2 := y_2$ provedeme horizontální posun a dostaneme parabolu $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2\colon 10z_1^2 - 2\sqrt{5}z_2 + 10 = 0\}$.



Zdroj: https://kam.mff.cuni.cz/~fiala

Zkoušky

Zkoušky

- Průběh zkoušky:
    - Písemná s případnou opravou u ústní části. Písemná část maximálně na 2 hodiny.
    - Typicky 4 otázky, z toho 1 na definice a důkazy, 2 příklady a 1 se čtyřmi tvrzeními ano/ne.

Zkoušky

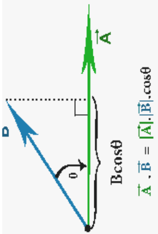
- Průběh zkoušky:
  - Písemná s případnou opravou u ústní části. Písemná část maximálně na 2 hodiny.
  - Typicky 4 otázky, z toho 1 na definice a důkazy, 2 příklady a 1 se čtyřmi tvrzeními ano/ne.
- Termíny jsou již v SISu (24.5., 30.5., 3.6., 16.6., 20.6., 27.6.).
  - Vždy od 10:40 s kapacitou 40. Další termín bude nejspíš až v září.

Zkoušky

- Průběh zkoušky:
  - Písemná s případnou opravou u ústní části. Písemná část maximálně na 2 hodiny.
  - Typicky 4 otázky, z toho 1 na definice a důkazy, 2 příklady a 1 se čtyřmi tvrzeními ano/ne.
- Termíny jsou již v SISu (24.5., 30.5., 3.6., 16.6., 20.6., 27.6.).
  - Vždy od 10:40 s kapacitou 40. Další termín bude nejspíš až v září.
- Při učení doporučuji si všechno psát na papír.

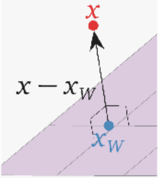
Zkoušky

- Průběh zkoušky:
  - Písemná s případnou opravou u ústní části. Písemná část maximálně na 2 hodiny.
  - Typicky 4 otázky, z toho 1 na definice a důkazy, 2 příklady a 1 se čtyřmi tvrzeními ano/ne.
- Termíny jsou již v SISu (24.5., 30.5., 3.6., 16.6., 20.6., 27.6.).
  - Vždy od 10:40 s kapacitou 40. Další termín bude nejspíš až v září.
- Při učení doporučuji si všechno psát na papír.
- Rozsah: vše, co jsme probrali (viz rozpis jednotlivých přednášek).

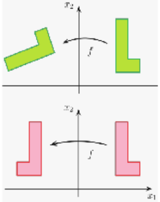


Skalární součin

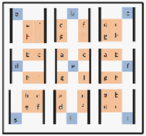
Ortogonální systémy



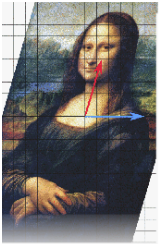
Ortogonální doplněk



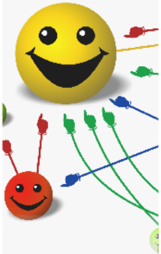
Ortogonální matice



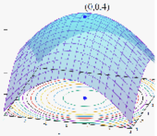
Determinanty



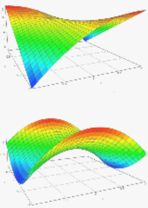
Vlastní čísla



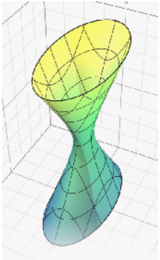
Podobnost



Pozitivní definitnost



Bilineární formy



Kvadriky

Děkuji za pozornost a přeji hladký průběh zkouškového.