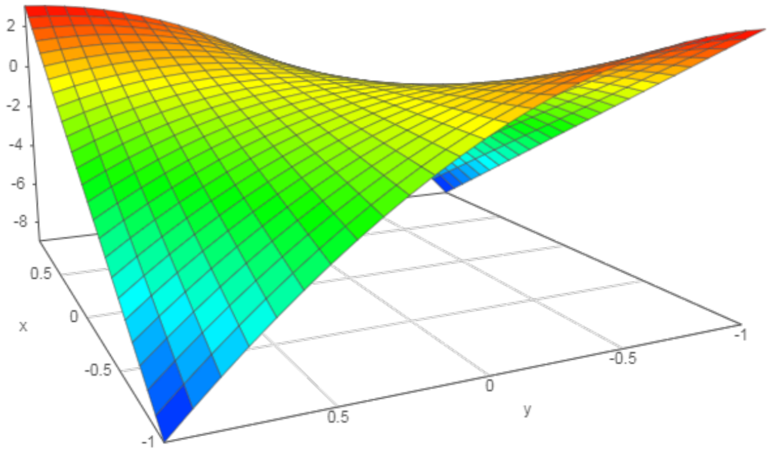
Lineární algebra 2

Martin Balko

13. přednáška

9. května 2022

Bilineární a kvadratické formy



Zdroj: https://kam.mff.cuni.cz/~fiala

Příklady bilineárních forem

Příklady bilineárních forem

- Každý reálný skalární součin na prostoru V je bilineární formou.

Příklady bilineárních forem

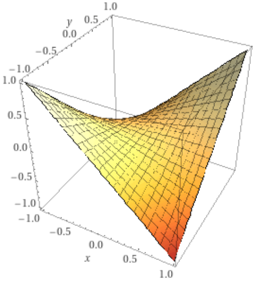
- Každý reálný skalární součin na prostoru V je bilineární formou.
- Komplexní už ne! (Není linearita ve 2. složce.)

Příklady bilineárních forem

- Každý reálný skalární součin na prostoru V je bilineární formou.
- Komplexní už ne! (Není linearita ve 2. složce.)
- Zobrazení $b\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dané předpisem $b(x, y) = x^\top A y$ pro $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je bilineární formou.

Příklady bilineárních forem

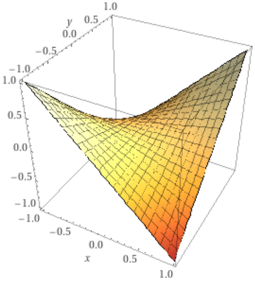
- Každý reálný skalární součin na prostoru V je bilineární formou.
- Komplexní už ne! (Není linearita ve 2. složce.)
- Zobrazení $b\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dané předpisem $b(x, y) = x^\top A y$ pro $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je bilineární formou. Pro $n = 1$ dostáváme $b(x, y) = a x^\top y$, kde $a \in \mathbb{R}$.



Zdroj: https://www.wolframalpha.com/

Příklady bilineárních forem

- Každý reálný skalární součin na prostoru V je bilineární formou.
- Komplexní už ne! (Není linearita ve 2. složce.)
- Zobrazení $b\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dané předpisem $b(x, y) = x^\top A y$ pro $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je bilineární formou. Pro $n = 1$ dostáváme $b(x, y) = a x^\top y$, kde $a \in \mathbb{R}$.

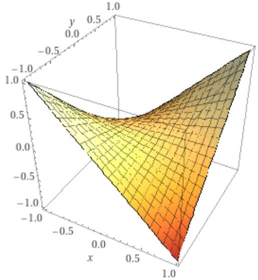


Zdroj: https://www.wolframalpha.com/

- Pro $V = \mathbb{R}^2$, $x^\top = (x_1, x_2)$ a $y^\top = (y_1, y_2)$ je $b(x, y) = x_1 y_1 + 3x_1 y_2 + 3x_2 y_1 + 10x_2 y_2$ symetrickou bilineární formou.

Příklady bilineárních forem

- Každý reálný skalární součin na prostoru V je bilineární formou.
- Komplexní už ne! (Není linearita ve 2. složce.)
- Zobrazení $b\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dané předpisem $b(x, y) = x^\top A y$ pro $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je bilineární formou. Pro $n = 1$ dostáváme $b(x, y) = a x^\top y$, kde $a \in \mathbb{R}$.



Zdroj: https://www.wolframalpha.com/

- Pro $V = \mathbb{R}^2$, $x^\top = (x_1, x_2)$ a $y^\top = (y_1, y_2)$ je $b(x, y) = x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + 10x_2y_2$ symetrickou bilineární formou.
- Pro $V = \mathbb{Z}_5^2$ je $b(x, y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 4x_2y_1 + 3x_2y_2$ bilineární formou.

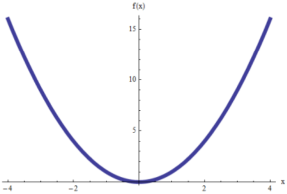
Příklady kvadratických forem

Příklady kvadratických forem

- Zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dané předpisem $f(x) = x^\top A x$ pro symetrickou $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je kvadratickou formou.

Příklady kvadratických forem

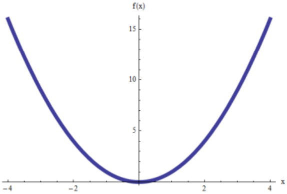
- Zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dané předpisem $f(x) = x^\top Ax$ pro symetrickou $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je kvadratickou formou. Pro $n = 1$ dostáváme $f(x) = ax^2$ (parabola), kde $a \in \mathbb{R}$.



Zdroj: https://mathcracker.com/

Příklady kvadratických forem

- Zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dané předpisem $f(x) = x^\top Ax$ pro symetrickou $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je kvadratickou formou. Pro $n = 1$ dostáváme $f(x) = ax^2$ (parabola), kde $a \in \mathbb{R}$.

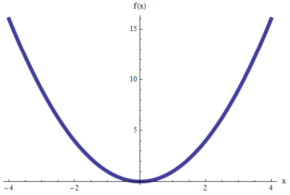


Zdroj: https://mathcracker.com/

- Pro $V = \mathbb{R}^2$, $x^\top = (x_1, x_2)$ a $y^\top = (y_1, y_2)$ je $f(x) = x_1^2 + 6x_1x_2 + 10x_2^2$ kvadratická forma indukovaná symetrickou bilineární formou $b(x, y) = x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + 10x_2y_2$.

Příklady kvadratických forem

- Zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dané předpisem $f(x) = x^\top Ax$ pro symetrickou $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je kvadratickou formou. Pro $n = 1$ dostáváme $f(x) = ax^2$ (parabola), kde $a \in \mathbb{R}$.



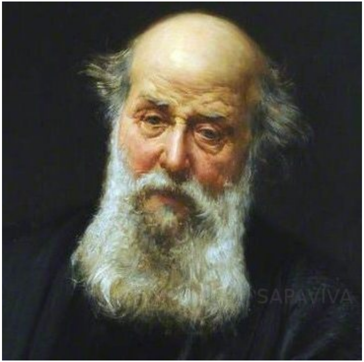
Zdroj: https://mathcracker.com/

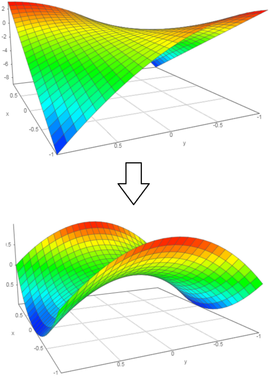
- Pro $V = \mathbb{R}^2$, $x^\top = (x_1, x_2)$ a $y^\top = (y_1, y_2)$ je $f(x) = x_1^2 + 6x_1x_2 + 10x_2^2$ kvadratická forma indukovaná symetrickou bilineární formou $b(x, y) = x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + 10x_2y_2$.
- Pro $V = \mathbb{Z}_2^2$, není $f(x) = x_1x_2$ kvadratickou formou, protože není indukovaná symetrickou bilineární formou.

Sylvesterův zákon setrvačnosti

Sylvesterův zákon setrvačnosti

- Buď $f(x) = x^\top A x$ kvadratická forma na $\mathbb{R}^n$. Pak existuje báze, vůči níž má f diagonální matici s prvky $-1, 0, 1$. Navíc, tato matice je až na pořadí prvků jednoznačná.





Obrázek: James Joseph Sylvester (1814–1897).

Zdroje: https://www.sapaviva.com/ a https://kam.mff.cuni.cz/~fiala

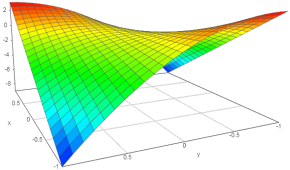
Sylvesterův zákon setrvačnosti: příklad

Sylvesterův zákon setrvačnosti: příklad

- Mějme kvadratickou formu $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ danou předpisem $f(x) = 6x_1x_2 - 3x_2^2$.

Sylvesterův zákon setrvačnosti: příklad

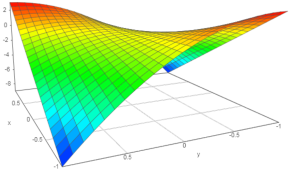
- Mějme kvadratickou formu $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ danou předpisem $f(x) = 6x_1x_2 - 3x_2^2$. Tedy $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -3 \end{smallmatrix}\right)$ je maticí f vzhledem k $B = \mathrm{Kan}$.



Zdroj: https://kam.mff.cuni.cz/~fiala

Sylvesterův zákon setrvačnosti: příklad

- Mějme kvadratickou formu $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ danou předpisem $f(x) = 6x_1x_2 - 3x_2^2$. Tedy $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ je maticí f vzhledem k $B = \mathrm{Kan}$.

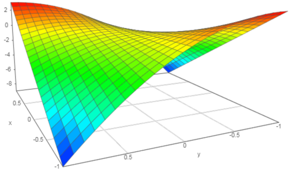


Zdroj: https://kam.mff.cuni.cz/~fiala

- Mějme bázi $B' = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ prostoru $\mathbb{R}^2$.

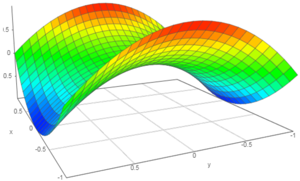
Sylvesterův zákon setrvačnosti: příklad

- Mějme kvadratickou formu $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ danou předpisem $f(x) = 6x_1x_2 - 3x_2^2$. Tedy $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ je maticí f vzhledem k $B = \mathrm{Kan}$.



Zdroj: https://kam.mff.cuni.cz/~fiala

- Mějme bázi $B' = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ prostoru $\mathbb{R}^2$. Potom $S = {}_B[id]_{B'} = B'$ a matice f vůči B' je $S^\top AS = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.



Zdroj: https://kam.mff.cuni.cz/~fiala

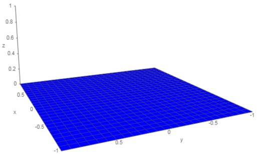
Kvadratické formy v $\mathbb{R}^2$

Kvadratické formy v $\mathbb{R}^2$

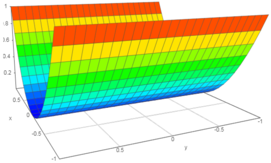
- Podle Sylvestrova zákona mají kvadratické formy v $\mathbb{R}^2$ v podstatě jeden z následujících tvarů v souřadném systému vhodné báze.

Kvadratické formy v $\mathbb{R}^2$

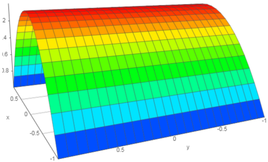
- Podle Sylvestrova zákona mají kvadratické formy v $\mathbb{R}^2$ v podstatě jeden z následujících tvarů v souřadném systému vhodné báze.



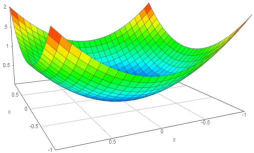
(a) 0



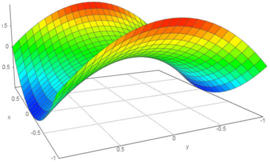
(b) x_1^2



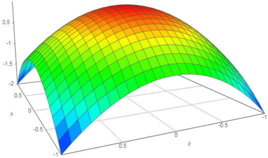
(c) $-x_1^2$



(d) $x_1^2 + x_2^2$

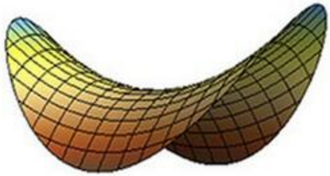


(e) $x_1^2 - x_2^2$



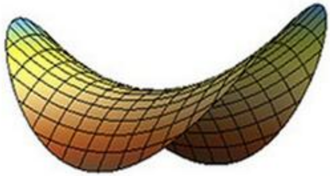
(f) $-x_1^2 - x_2^2$

Zdroj: https://kam.mff.cuni.cz/~fiala



$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$$

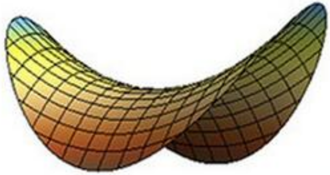
Zdroj: https://twitter.com/pickover



$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$$

Zdroj: https://twitter.com/pickover

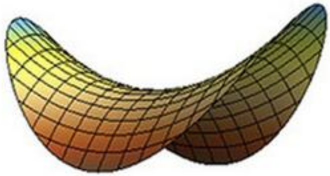
- Brambůrky Pringles mají tvar hyperbolického paraboloidu, aby se na sebe daly snadno skládat a snadno se nezlomily.



$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$$

Zdroj: https://twitter.com/pickover

- Brambůrky Pringles mají tvar hyperbolického paraboloidu, aby se na sebe daly snadno skládat a snadno se nezlomily. Projektanti těchto brambůrek údajně použili superpočítače.



$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$$

Zdroj: https://twitter.com/pickover

- Brambůrky Pringles mají tvar hyperbolického paraboloidu, aby se na sebe daly snadno skládat a snadno se nezlomily. Projektanti těchto brambůrek údajně použili superpočítače.

Děkuji za pozornost.