

Lineární algebra 2

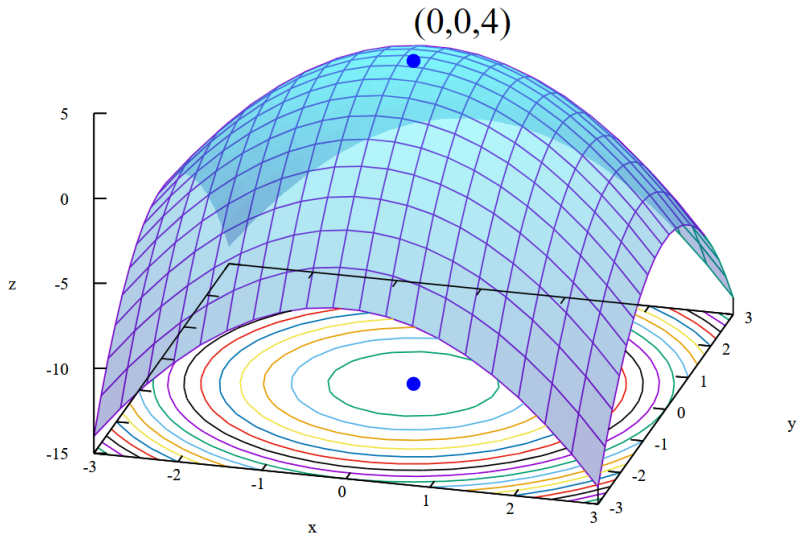
Martin Balko

12. přednáška

2. května 2022



Pozitivně (semi-)definitní matice



Připomenutí z minula

Připomenutí z minula

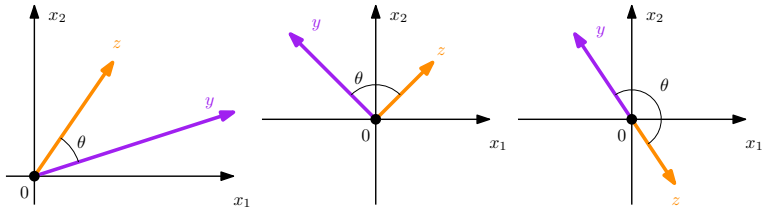
- Symetrická matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je **pozitivně semidefinitní**, pokud platí $x^T Ax \geq 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n$.

Připomenutí z minula

- Symetrická matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je **pozitivně semidefinitní**, pokud platí $x^T Ax \geq 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n$.
- Symetrická matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je **pozitivně definitní**, pokud platí $x^T Ax > 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{o\}$.

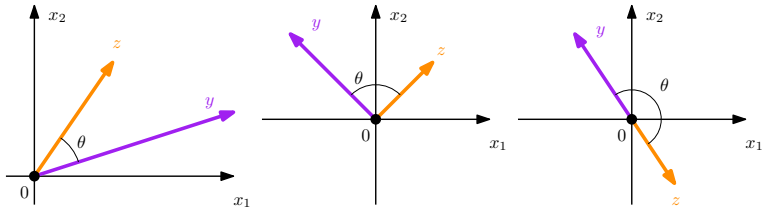
Připomenutí z minula

- Symetrická matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je **pozitivně semidefinitní**, pokud platí $x^T Ax \geq 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n$.
- Symetrická matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je **pozitivně definitní**, pokud platí $x^T Ax > 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
- Analogie nezáporných a kladných čísel. Ukázali jsme si jejich vlastnosti a charakterizace.



Připomenutí z minula

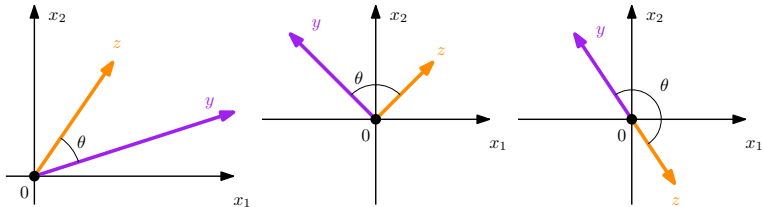
- Symetrická matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je **pozitivně semidefinitní**, pokud platí $x^T Ax \geq 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n$.
- Symetrická matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je **pozitivně definitní**, pokud platí $x^T Ax > 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{o\}$.
- Analogie nezáporných a kladných čísel. Ukázali jsme si jejich vlastnosti a charakterizace.



- Viděli jsme i dvě metody na **testování pozitivní definitnosti**.

Připomenutí z minula

- Symetrická matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je **pozitivně semidefinitní**, pokud platí $x^T Ax \geq 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n$.
- Symetrická matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je **pozitivně definitní**, pokud platí $x^T Ax > 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
- Analogie nezáporných a kladných čísel. Ukázali jsme si jejich vlastnosti a charakterizace.



- Viděli jsme i dvě metody na **testování pozitivní definitnosti**.
- První byla založená na **rekurentním vzorečku** a **Gaussově eliminaci**.

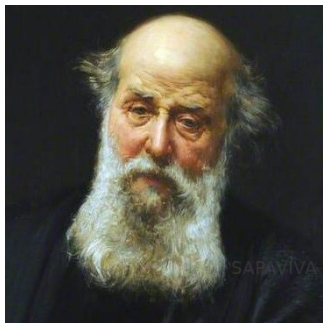
Sylvesterovo kritérium

Sylvesterovo kritérium

- Druhá testovací metoda byla založená na determinantech.

Sylvesterovo kritérium

- Druhá testovací metoda byla založená na determinantech.
- Symetrická matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je pozitivně definitní právě tehdy, když determinanty všech hlavních vedoucích podmatic jsou kladné.



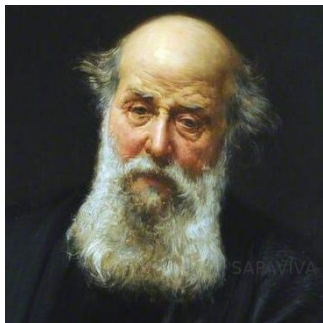
$$\begin{array}{ccccccc} \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 & \dots & \Delta_n \\ \left(\begin{array}{cccc} q_{11} & q_{12} & q_{13} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & & \vdots \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ q_{n1} & & \dots & & q_{nn} \end{array} \right) \end{array}$$

Obrázek: James Joseph Sylvester (1814–1897).

Zdroje: <https://www.sapaviva.com/> a <https://psychometrosca.com/>

Sylvesterovo kritérium

- Druhá testovací metoda byla založená na determinantech.
- Symetrická matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je pozitivně definitní právě tehdy, když determinanty všech hlavních vedoucích podmatic jsou kladné.



$$\begin{array}{ccccccc} \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 & \dots & \Delta_n & & \\ \left(\begin{array}{cccccc} q_{11} & q_{12} & q_{13} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & & \vdots \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ q_{n1} & & \dots & & q_{nn} \end{array} \right) \end{array}$$

Obrázek: James Joseph Sylvester (1814–1897).

Zdroje: <https://www.sapaviva.com/> a <https://psychometros.com/>

- Dnes si ukážeme Sylvesterovo kritérium pro pozitivně semidefinitní matici.

Choleského rozklad

Choleského rozklad

- Pro každou pozitivně definitní matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existuje jediná dolní trojúhelníková matice $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ s kladnou diagonálou taková, že

$$A = L \cdot L^T.$$



$$\begin{array}{c} A \\ \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} L \\ \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} \\ \hline \end{array} \end{array} \cdot \begin{array}{c} L^T \\ \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} \\ \hline \end{array} \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Obrázek: André-Louis Cholesky (1875–1918).

Choleského rozklad

- Pro každou pozitivně definitní matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existuje jediná dolní trojúhelníková matice $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ s kladnou diagonálou taková, že

$$A = L \cdot L^T.$$



$$\begin{array}{c} A \\ \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} L \\ \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} \\ \hline \end{array} \end{array} \cdot \begin{array}{c} L^T \\ \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} \\ \hline \end{array} \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Obrázek: André-Louis Cholesky (1875–1918).

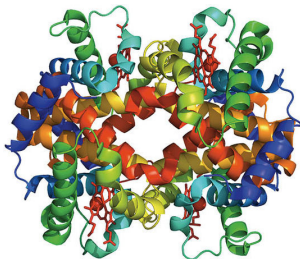
Zdroj: <https://twitter.com/bibnumsciences>

- Vyvinuta pro účely triangularizace a vytvoření přesnějších map.

Náčrt aplikace: struktura bílkovin

Náčrt aplikace: struktura bílkovin

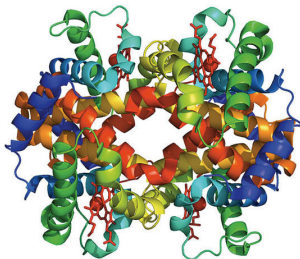
- Magnetickou rezonancí naměříme vzdálenosti jednotlivých atomů bílkoviny. Jak z toho ale určit jejich pozice?



Zdroj: <https://www.ias.edu/>

Náčrt aplikace: struktura bílkovin

- Magnetickou rezonancí naměříme vzdálenosti jednotlivých atomů bílkoviny. Jak z toho ale určit jejich pozice?

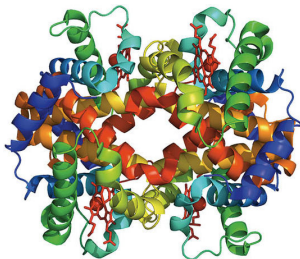


Zdroj: <https://www.ias.edu/>

- Známe matici $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$, kde $D_{i,j}$ je vzdálenost i -tého a j -tého atomu.

Náčrt aplikace: struktura bílkovin

- Magnetickou rezonancí naměříme vzdálenosti jednotlivých atomů bílkoviny. Jak z toho ale určit jejich pozice?

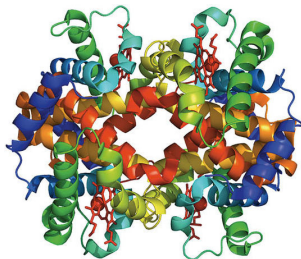


Zdroj: <https://www.ias.edu/>

- Známe matici $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$, kde $D_{i,j}$ je vzdálenost i -tého a j -tého atomu. Chceme $X \in \mathbb{R}^{n \times 3}$, kde $X_{i,*}$ jsou souřadnice i -tého atomu v \mathbb{R}^3 .

Náčrt aplikace: struktura bílkovin

- Magnetickou rezonancí naměříme vzdálenosti jednotlivých atomů bílkoviny. Jak z toho ale určit jejich pozice?

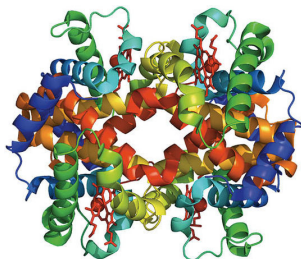


Zdroj: <https://www.ias.edu/>

- Známe matici $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$, kde $D_{i,j}$ je vzdálenost i -tého a j -tého atomu. Chceme $X \in \mathbb{R}^{n \times 3}$, kde $X_{i,*}$ jsou souřadnice i -tého atomu v \mathbb{R}^3 .
- Matice D^* , kde $D_{i,j}^* = \frac{D_{i,n}^2 + D_{j,n}^2 + D_{i,j}^2}{2}$, je **pozitivně definitní** a splňuje $D^* = X \cdot X^\top$.

Náčrt aplikace: struktura bílkovin

- Magnetickou rezonancí naměříme vzdálenosti jednotlivých atomů bílkoviny. Jak z toho ale určit jejich pozice?

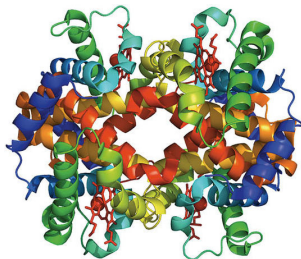


Zdroj: <https://www.ias.edu/>

- Známe matici $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$, kde $D_{i,j}$ je vzdálenost i -tého a j -tého atomu. Chceme $X \in \mathbb{R}^{n \times 3}$, kde $X_{i,*}$ jsou souřadnice i -tého atomu v \mathbb{R}^3 .
- Matice D^* , kde $D_{i,j}^* = \frac{D_{i,n}^2 + D_{j,n}^2 + D_{i,j}^2}{2}$, je **pozitivně definitní** a splňuje $D^* = X \cdot X^\top$. Uvažme její spektrální rozklad $D^* = Q \cdot \Lambda \cdot Q^\top$.

Náčrt aplikace: struktura bílkovin

- Magnetickou rezonancí naměříme vzdálenosti jednotlivých atomů bílkoviny. Jak z toho ale určit jejich pozice?



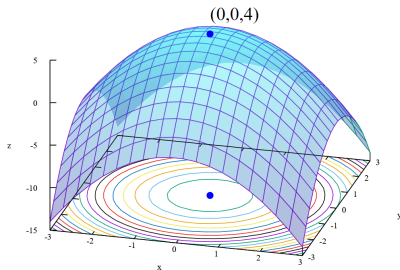
Zdroj: <https://www.ias.edu/>

- Známe matici $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$, kde $D_{i,j}$ je vzdálenost i -tého a j -tého atomu. Chceme $X \in \mathbb{R}^{n \times 3}$, kde $X_{i,*}$ jsou souřadnice i -tého atomu v \mathbb{R}^3 .
- Matice D^* , kde $D_{i,j}^* = \frac{D_{i,n}^2 + D_{j,n}^2 + D_{i,j}^2}{2}$, je **pozitivně definitní** a splňuje $D^* = X \cdot X^\top$. Uvažme její spektrální rozklad $D^* = Q \cdot \Lambda \cdot Q^\top$.
- Potom z $D^* = X \cdot X^\top$ máme $X = Q \cdot \sqrt{\Lambda}$.

Náčrt aplikace: optimalizace

Náčrt aplikace: optimalizace

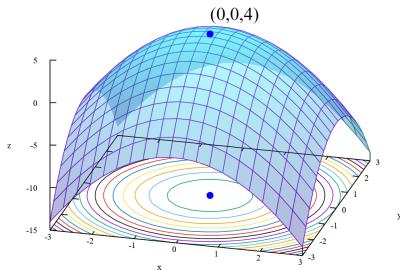
- Pozitivně (semi-)definitní matice hrají v optimalizaci mnoho rolí.



Zdroj: <https://en.wikipedia.org>

Náčrt aplikace: optimalizace

- Pozitivně (semi-)definitní matice hrají v optimalizaci mnoho rolí.

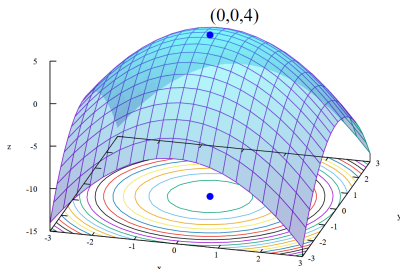


Zdroj: <https://en.wikipedia.org>

- Je na nich založené **semidefinitní programování**, kde hledáme minimum lineární funkce za podmínky na pozitivní semidefinitnost matice, jejíž prvky jsou lineární funkcí proměnných.

Náčrt aplikace: optimalizace

- Pozitivně (semi-)definitní matice hrají v optimalizaci mnoho rolí.

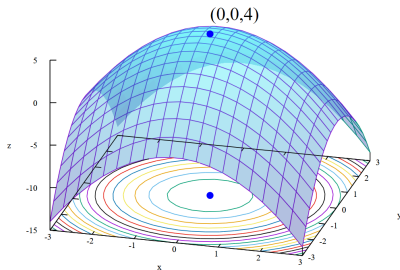


Zdroj: <https://en.wikipedia.org>

- Je na nich založené **semidefinitní programování**, kde hledáme minimum lineární funkce za podmínky na pozitivní semidefinitnost matice, jejíž prvky jsou lineární funkcí proměnných.
- Semidefinitními programy dokážeme modelovat větší třídu úloh než **lineárními programy**, ale stále jsou řešitelné za rozumný čas.

Náčrt aplikace: optimalizace

- Pozitivně (semi-)definitní matice hrají v optimalizaci mnoho rolí.



Zdroj: <https://en.wikipedia.org>

- Je na nich založené **semidefinitní programování**, kde hledáme minimum lineární funkce za podmínky na pozitivní semidefinitnost matice, jejíž prvky jsou lineární funkcí proměnných.
- Semidefinitními programy dokážeme modelovat větší třídu úloh než **lineárními programy**, ale stále jsou řešitelné za rozumný čas.
- Řada složitých problémů se dá rychle a těsně aproximovat pomocí semidefinitních programů.

Sur la résolution numérique
des Equations d'Equations Arithmétiques

A. Cholesky

Il s'agit de trouver d'avance et de
appliquer les formules pour ces cas. On a vu que
l'écriture, et surtout la lecture, de ces formules
est très pénible et que l'on a cherché à simplifier
cette écriture en utilisant les notations
d'algèbre linéaire. C'est le cas de la notation
des pages 7 et 8. On a vu de la composition de
ces notations et de leur utilisation. On a vu
aussy que l'on a cherché à simplifier la notation
des pages 7 et 8.

Il faut que ces notations soient
simples et faciles à lire et à écrire. On a
vu que l'on a cherché à simplifier la notation
des pages 7 et 8.

On a vu que l'on a cherché à simplifier la notation
des pages 7 et 8.

I

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 = 1 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 = 1 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 = 1 \end{cases}$$

pour l'équation

II

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 = 1 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 = 1 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 = 1 \end{cases}$$

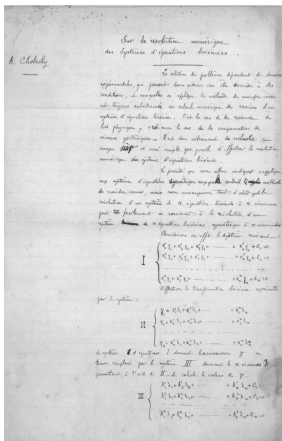
l'équation d'Equations Arithmétiques et
dans lequel on a écrit III. On a vu que l'on a
cherché à simplifier la notation des pages 7 et 8.

III

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 = 1 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 = 1 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 = 1 \end{cases}$$


Obrázek: Choleského nepublikované poznámky popisující Choleského rozklad a jak jej implementovat a spočítat na počítacím stroji **Dactyle**.

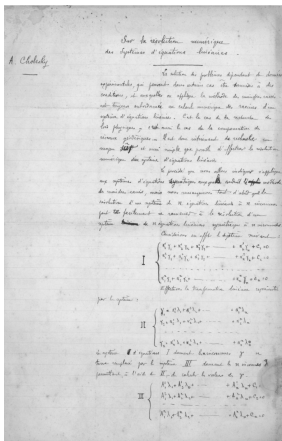
Zdroje: C. Brezinski: The life and work of André Cholesky a <https://americanhistory.si.edu/>



Obrázek: Choleského nepublikované poznámky popisující Choleského rozklad a jak jej implementovat a spočítat na počítacím stroji **Dactyle**.

Zdroje: C. Brezinski: The life and work of André Cholesky a <https://americanhistory.si.edu/>

- Následuje přednáška **prof. Kučery** o metodě konjugovaných gradientů.



Obrázek: Choleského nepublikované poznámky popisující Choleského rozklad a jak jej implementovat a spočítat na počítacím stroji **Dactyle**.

Zdroje: C. Brezinski: The life and work of André Cholesky a <https://americanhistory.si.edu/>

- Následuje přednáška **prof. Kučery** o metodě konjugovaných gradientů.

Děkuji za pozornost.