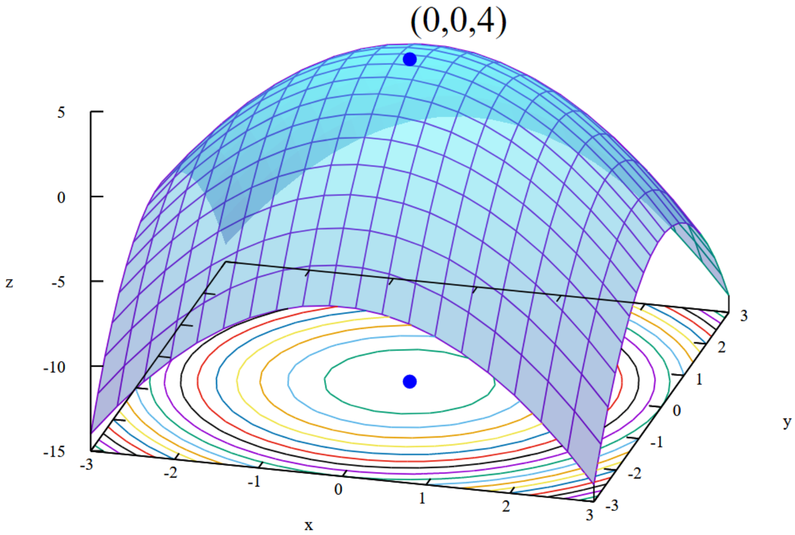
Lineární algebra 2

Martin Balko

11. přednáška

25. dubna 2022

Pozitivně (semi-)definitní matice



Zdroj: https://en.wikipedia.org

Pozitivně (semi-)definitní matice: příklady

Pozitivně (semi-)definitní matice: příklady

- Matice I_n je pozitivně definitní a 0_n je pozitivně semidefinitní.

Pozitivně (semi-)definitní matice: příklady

- Matice I_n je pozitivně definitní a 0_n je pozitivně semidefinitní.
- Matice
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
je pozitivně definitní, protože pro každé $x^\top = (a, b, c) \neq o$ máme $x^\top A x = a^2 + (a-b)^2 + (b-c)^2 + c^2 > 0$.

Pozitivně (semi-)definitní matice: příklady

- Matice I_n je pozitivně definitní a 0_n je pozitivně semidefinitní.
- Matice
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
je pozitivně definitní, protože pro každé $x^\top = (a, b, c) \neq o$ máme $x^\top A x = a^2 + (a-b)^2 + (b-c)^2 + c^2 > 0$.
- Matice
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
není pozitivně semidefinitní, protože pro $y^\top = (-1, 1)$ máme $y^\top B y = -2 < 0$.

Pozitivně definitní matice: interpretace

Pozitivně definitní matice: interpretace

- Pozitivně definitní matice A by měly odpovídat kladným číslům.

Pozitivně definitní matice: interpretace

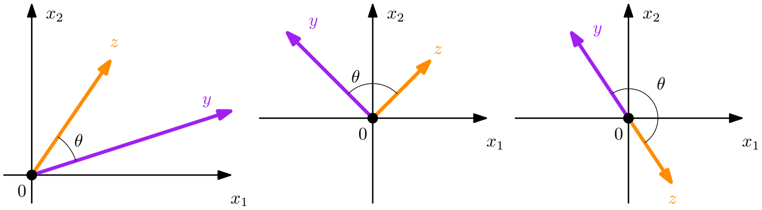
- Pozitivně definitní matice A by měly odpovídat kladným číslům.
- Kladné číslo $a \in \mathbb{R}$ při násobení číslem $b \in \mathbb{R}$ nemění znaménko b, neboli „a nepřevrací b“.

Pozitivně definitní matice: interpretace

- Pozitivně definitní matice A by měly odpovídat kladným číslům.
- Kladné číslo $a \in \mathbb{R}$ při násobení číslem $b \in \mathbb{R}$ nemění znaménko b, neboli „a nepřevrací b“.
- Výraz $x^\top Ax$ značí skalární součin $x \neq o$ se svým obrazem Ax.

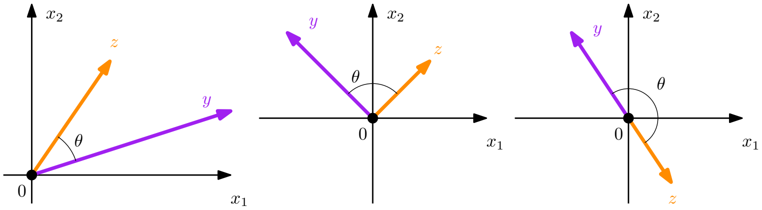
Pozitivně definitní matice: interpretace

- Pozitivně definitní matice A by měly odpovídat kladným číslům.
- Kladné číslo $a \in \mathbb{R}$ při násobení číslem $b \in \mathbb{R}$ nemění znaménko b, neboli „a nepřevrací b“.
- Výraz $x^\top Ax$ značí skalární součin $x \neq o$ se svým obrazem Ax.
- Pro každé $y, z \in \mathbb{R}^2$ je $y^\top z = |y||z|\cos(\Theta)$ kladné právě tehdy, když $-\pi/2 < \Theta < \pi/2$, neboli úhel mezi y a z je ostrý.



Pozitivně definitní matice: interpretace

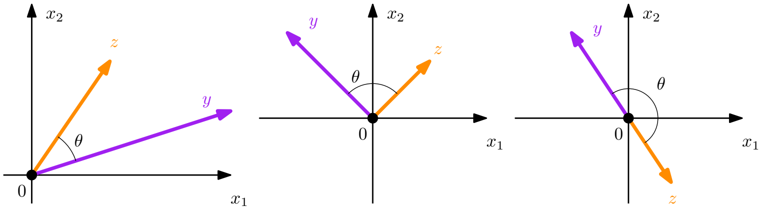
- Pozitivně definitní matice A by měly odpovídat kladným číslům.
- Kladné číslo $a \in \mathbb{R}$ při násobení číslem $b \in \mathbb{R}$ nemění znaménko b, neboli „a nepřevrací b“.
- Výraz $x^\top Ax$ značí skalární součin $x \neq o$ se svým obrazem Ax.
- Pro každé $y, z \in \mathbb{R}^2$ je $y^\top z = |y||z|\cos(\Theta)$ kladné právě tehdy, když $-\pi/2 < \Theta < \pi/2$, neboli úhel mezi y a z je ostrý.



- Protože $x^\top Ax > 0$, tak je úhel mezi x a Ax je v $(-\pi/2, \pi/2)$ a zobrazení určené maticí A tedy vektory nepřevrací.

Pozitivně definitní matice: interpretace

- Pozitivně definitní matice A by měly odpovídat kladným číslům.
- Kladné číslo $a \in \mathbb{R}$ při násobení číslem $b \in \mathbb{R}$ nemění znaménko b, neboli „a nepřevrací b“.
- Výraz $x^\top Ax$ značí skalární součin $x \neq o$ se svým obrazem Ax.
- Pro každé $y, z \in \mathbb{R}^2$ je $y^\top z = |y||z| \cos(\Theta)$ kladné právě tehdy, když $-\pi/2 < \Theta < \pi/2$, neboli úhel mezi y a z je ostrý.



- Protože $x^\top Ax > 0$, tak je úhel mezi x a Ax je v $(-\pi/2, \pi/2)$ a zobrazení určené maticí A tedy vektory nepřevrací.
- Matice A se tedy „chová jako kladné číslo“.

Rekurentní vzoreček: příklad

Rekurentní vzoreček: příklad

- Otestujeme, zda je následující matice pozitivně definitní:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Rekurentní vzoreček: příklad

- Otestujeme, zda je následující matice pozitivně definitní:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

- Máme $\alpha = 4$, $a^\top = (-2, 4)$ a $\overline{A} = \left(\begin{smallmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 6 \end{smallmatrix}\right)$.

Rekurentní vzoreček: příklad

- Otestujeme, zda je následující matice pozitivně definitní:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

- Máme $\alpha = 4$, $a^\top = (-2, 4)$ a $\overline{A} = \left(\begin{smallmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 6 \end{smallmatrix}\right)$. Protože $\alpha > 0$, tak upravíme

$$\overline{A} - \frac{aa^\top}{\alpha} = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} - \frac{\left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)(-2, 4)}{4} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Rekurentní vzoreček: příklad

- Otestujeme, zda je následující matice pozitivně definitní:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

- Máme $\alpha = 4$, $a^\top = (-2, 4)$ a $\overline{A} = \left(\begin{smallmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 6 \end{smallmatrix}\right)$. Protože $\alpha > 0$, tak upravíme

$$\overline{A} - \frac{aa^\top}{\alpha} = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} - \frac{\left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)(-2, 4)}{4} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

- V další iteraci je $\alpha' = 9$, $a' = (3)$ a $\overline{A}' = (2)$ a

$$\overline{A}' - \frac{a'a'^\top}{\alpha'} = (2) - \frac{(3)(3)}{9} = (1).$$

Rekurentní vzoreček: příklad

- Otestujeme, zda je následující matice pozitivně definitní:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

- Máme $\alpha = 4$, $a^\top = (-2, 4)$ a $\overline{A} = \left(\begin{smallmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 6 \end{smallmatrix}\right)$. Protože $\alpha > 0$, tak upravíme

$$\overline{A} - \frac{aa^\top}{\alpha} = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} - \frac{\left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)(-2, 4)}{4} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

- V další iteraci je $\alpha' = 9$, $a' = (3)$ a $\overline{A}' = (2)$ a

$$\overline{A}' - \frac{a' a'^\top}{\alpha'} = (2) - \frac{(3)(3)}{9} = (1).$$

- Matice (1) je pozitivně definitní a tedy i A je pozitivně definitní.

Testování pomocí Gaussovy eliminace: příklad

Testování pomocí Gaussovy eliminace: příklad

- Otestujeme, zda je následující matice pozitivně definitní:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Testování pomocí Gaussovy eliminace: příklad

- Otestujeme, zda je následující matice pozitivně definitní:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

- Převod pomocí Gaussovy eliminace, kde používáme pouze přičtení násobku řádku s pivotem k jinému řádku dává:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Testování pomocí Gaussovy eliminace: příklad

- Otestujeme, zda je následující matice pozitivně definitní:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

- Převod pomocí Gaussovy eliminace, kde používáme pouze přičtení násobku řádku s pivotem k jinému řádku dává:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Testování pomocí Gaussovy eliminace: příklad

- Otestujeme, zda je následující matice pozitivně definitní:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

- Převod pomocí Gaussovy eliminace, kde používáme pouze přičtení násobku řádku s pivotem k jinému řádku dává:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 0 & 9 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Testování pomocí Gaussovy eliminace: příklad

- Otestujeme, zda je následující matice pozitivně definitní:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

- Převod pomocí Gaussovy eliminace, kde používáme pouze přičtení násobku řádku s pivotem k jinému řádku dává:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Testování pomocí Gaussovy eliminace: příklad

- Otestujeme, zda je následující matice pozitivně definitní:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

- Převod pomocí Gaussovy eliminace, kde používáme pouze přičtení násobku řádku s pivotem k jinému řádku dává:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Testování pomocí Gaussovy eliminace: příklad

- Otestujeme, zda je následující matice pozitivně definitní:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

- Převod pomocí Gaussovy eliminace, kde používáme pouze přičtení násobku řádku s pivotem k jinému řádku dává:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Testování pomocí Gaussovy eliminace: příklad

- Otestujeme, zda je následující matice pozitivně definitní:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

- Převod pomocí Gaussovy eliminace, kde používáme pouze přičtení násobku řádku s pivotem k jinému řádku dává:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Testování pomocí Gaussovy eliminace: příklad

- Otestujeme, zda je následující matice pozitivně definitní:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

- Převod pomocí Gaussovy eliminace, kde používáme pouze přičtení násobku řádku s pivotem k jinému řádku dává:

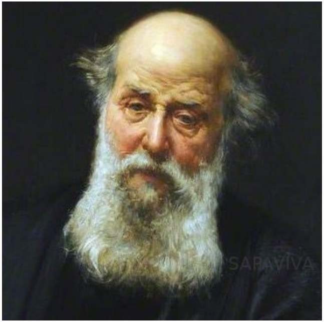
$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

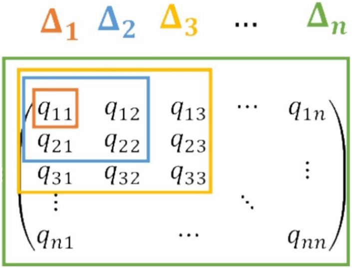
- Prvky na diagonále jsou kladné, tedy A je pozitivně definitní.

Sylvesterovo kritérium

Sylvesterovo kritérium

- Symetrická matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je positivně definitní právě tehdy, když determinanty všech hlavních vedoucích podmatic jsou kladné.



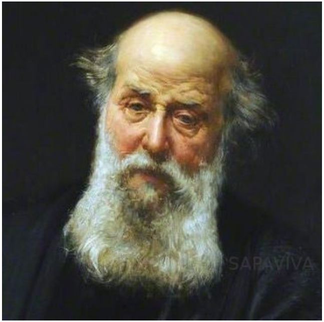


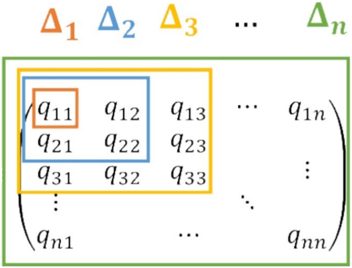
Obrázek: James Joseph Sylvester (1814–1897).

Zdroje: https://www.sapaviva.com/ a https://psychometroscar.com/

Sylvesterovo kritérium

- Symetrická matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je positivně definitní právě tehdy, když determinanty všech hlavních vedoucích podmatic jsou kladné.





Obrázek: James Joseph Sylvester (1814–1897).

Zdroje: https://www.sapaviva.com/ a https://psychometroscar.com/

- Sylvester vynalezl mnohé názvosloví: „matrix“ pro matice, „graf“ z teorie grafů či „diskriminant“.

Sylvesterovo kritérium: příklad

Sylvesterovo kritérium: příklad

- Otestujeme, zda je následující matice pozitivně definitní:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Sylvesterovo kritérium: příklad

- Otestujeme, zda je následující matice pozitivně definitní:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

- Ověřme kladnost determinantů hlavních vedoucích podmatic A_1, A_2, A_3:

$$\det(A_1) = \det(4) = 4,$$
$$\det(A_2) = \det \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} = 36,$$
$$\det(A_3) = \det \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} = 36.$$

Sylvesterovo kritérium: příklad

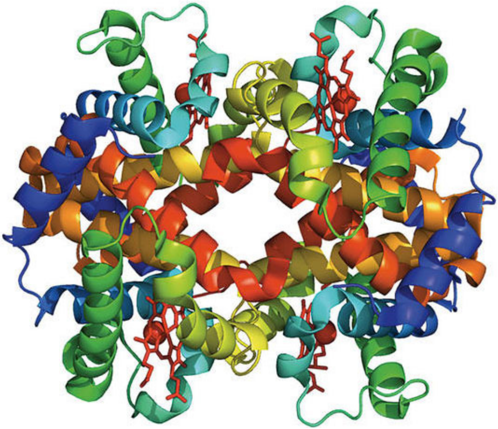
- Otestujeme, zda je následující matice pozitivně definitní:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

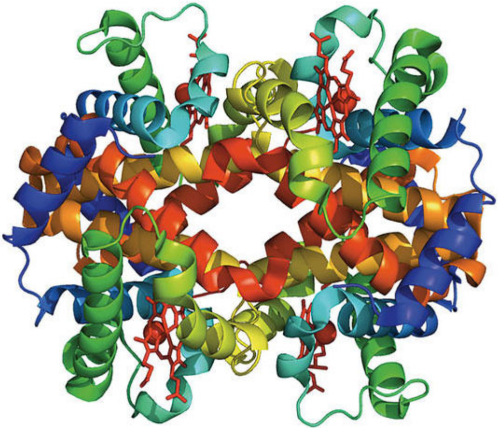
- Ověřme kladnost determinantů hlavních vedoucích podmatic A_1, A_2, A_3:

$$\begin{aligned} \det(A_1) &= \det(4) = 4, \\ \det(A_2) &= \det \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} = 36, \\ \det(A_3) &= \det \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} = 36. \end{aligned}$$

- Determinanty jsou kladné, tedy A je pozitivně definitní.

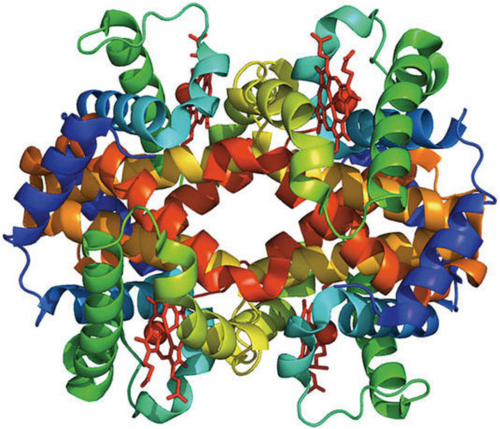


Zdroj: https://www.ias.edu/



Zdroj: https://www.ias.edu/

- Po příští přednášce bude následovat přednáška prof. Kučery o metodě konjugovaných gradientů s ukázkami www.algovision.org



Zdroj: https://www.ias.edu/

- Po příští přednášce bude následovat přednáška prof. Kučery o metodě konjugovaných gradientů s ukázkami www.algovision.org

Děkuji za pozornost.