Lineární algebra 2

Martin Balko

1. přednáška

14. února 2022

Základní informace

Základní informace

- Pokračování předmětu Lineární algebra 1: speciální matice, determinanty, vlastní čísla, aplikace lineární algebry.

Základní informace

- Pokračování předmětu Lineární algebra 1: speciální matice, determinanty, vlastní čísla, aplikace lineární algebry.
- Stránky přednášky: *kam.mff.cuni.cz/~balko/ln22122*
    - informace o přednášce, probraná témata, prezentace, zápisky ...

Základní informace

- Pokračování předmětu Lineární algebra 1: speciální matice, determinanty, vlastní čísla, aplikace lineární algebry.
- Stránky přednášky: *kam.mff.cuni.cz/~balko/ln22122*
  - informace o přednášce, probraná témata, prezentace, zápisky ...
- Cvičení:
  - celkem 8 cvičení, viz stránky přednášky.
  - cvičení pro pokročilé (Martin Černý a Nikola Kalábová).

Základní informace

- Pokračování předmětu Lineární algebra 1: speciální matice, determinanty, vlastní čísla, aplikace lineární algebry.
- Stránky přednášky: *kam.mff.cuni.cz/~balko/ln22122*
  - informace o přednášce, probraná témata, prezentace, zápisky ...
- Cvičení:
  - celkem 8 cvičení, viz stránky přednášky.
  - cvičení pro pokročilé (Martin Černý a Nikola Kalábová).
- Doporučená literatura:
  - M. Hladík: Lineární algebra (nejen) pro informatiky.

Zdroj: https://matfyzpress.cz

Sylabus

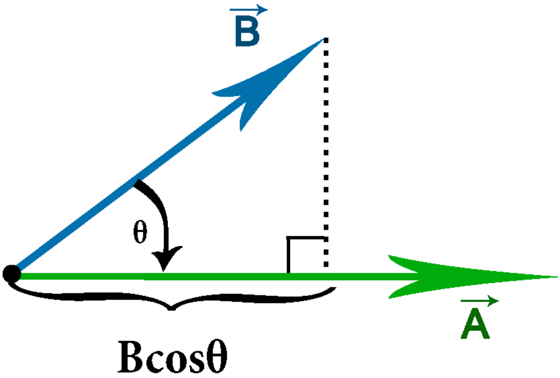
Sylabus

- Předběžný plán:

Sylabus

- Předběžný plán:
  - prostory se skalárním součinem
    - normy, metriky, ortogonalita, ...
  - determinanty
    - vlastnosti, Cramerovo pravidlo, geometrické interpretace, ...
  - vlastní čísla a vlastní vektory
    - charakteristický polynom, podobnost a diagonalizovatelnost matic, symetrické matice, výpočet vlastních čísel, ...
  - positivně semidefinitní a positivně definitní matice
    - charakterizace a vlastnosti, metody na testování, ...
  - bilineární a kvadratické formy
    - maticové vyjádření, Sylvestrův zákon setrvačnosti, ...

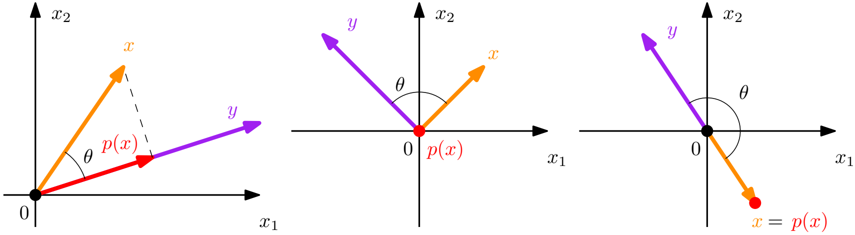
Skalární součin



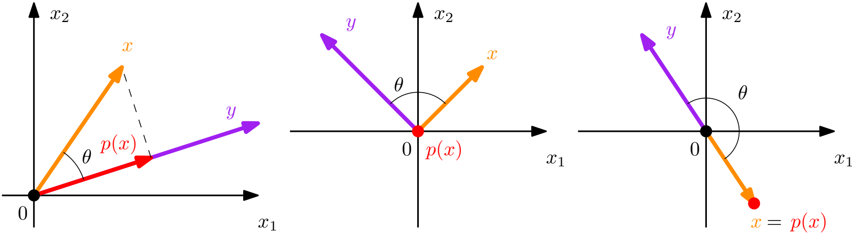
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| . |\vec{B}| . \cos\theta$$

Zdroj: https://math.stackexchange.com

Standardní skalární součin

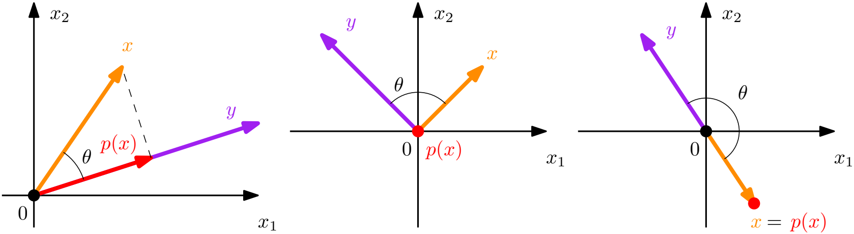


Standardní skalární součin



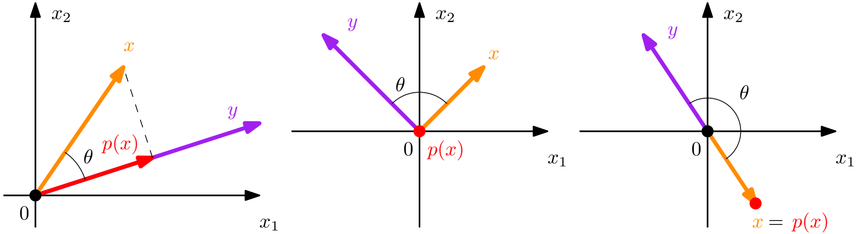
- $\langle x, y\rangle$ je součin délky $\|y\|$ s délkou $\|p(x)\|$ projekce $p(x)$ vektoru x na $\mathrm{span}\{y\}$. Tedy $\langle x, y\rangle = \|p(x)\| \cdot \|y\|$

Standardní skalární součin



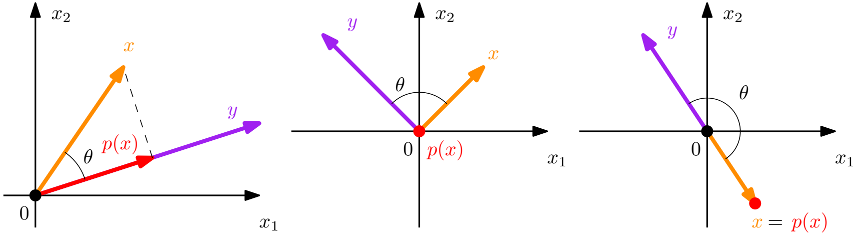
- $\langle x, y\rangle$ je součin délky $\|y\|$ s délkou $\|p(x)\|$ projekce $p(x)$ vektoru x na $\mathrm{span}\{y\}$. Tedy $\langle x, y\rangle = \|p(x)\| \cdot \|y\| = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos(\theta)$.

Standardní skalární součin



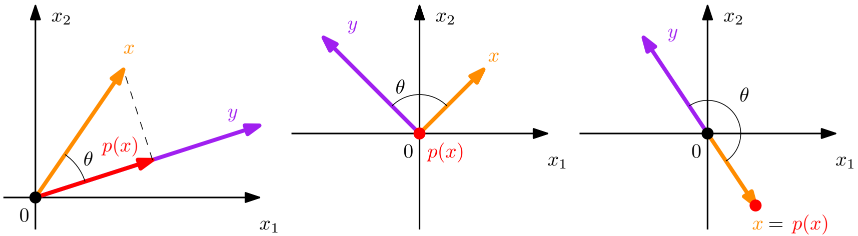
- $\langle x, y\rangle$ je součin délky $\|y\|$ s délkou $\|p(x)\|$ projekce $p(x)$ vektoru x na $\mathrm{span}\{y\}$. Tedy $\langle x, y\rangle = \|p(x)\| \cdot \|y\| = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos(\theta)$.
- Proč platí $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$?

Standardní skalární součin



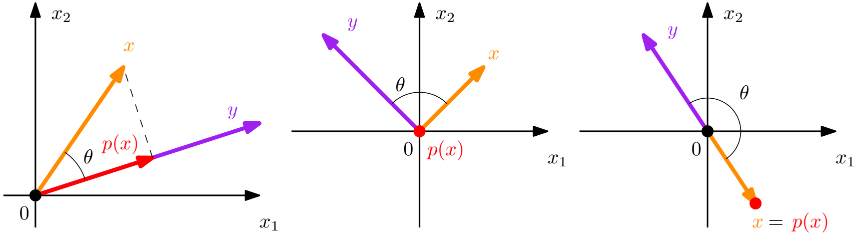
- $\langle x, y\rangle$ je součin délky $\|y\|$ s délkou $\|p(x)\|$ projekce $p(x)$ vektoru x na $\mathrm{span}\{y\}$. Tedy $\langle x, y\rangle = \|p(x)\| \cdot \|y\| = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos(\theta)$.
- Proč platí $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$?
  - Uvažme trojúhelník se stranami x, y a $x - y$.

Standardní skalární součin



- $\langle x, y \rangle$ je součin délky $\|y\|$ s délkou $\|p(x)\|$ projekce $p(x)$ vektoru x na $\mathrm{span}\{y\}$. Tedy $\langle x, y \rangle = \|p(x)\| \cdot \|y\| = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos(\theta)$.
- Proč platí $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$?
  - Uvažme trojúhelník se stranami x, y a $x - y$.
  - Podle Cosinové věty je $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|\|y\| \cos(\theta)$.

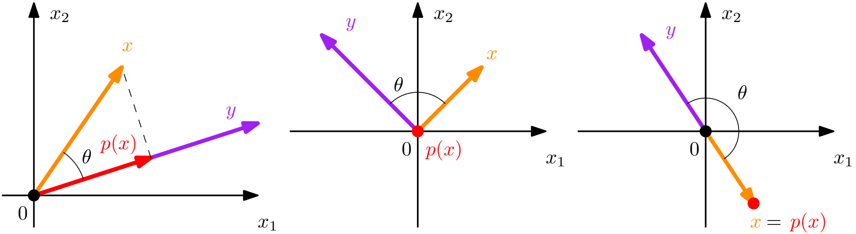
Standardní skalární součin



- $\langle x, y \rangle$ je součin délky $\|y\|$ s délkou $\|p(x)\|$ projekce $p(x)$ vektoru x na $\mathrm{span}\{y\}$. Tedy $\langle x, y \rangle = \|p(x)\| \cdot \|y\| = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos(\theta)$.
- Proč platí $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$?
  - Uvažme trojúhelník se stranami x, y a $x - y$.
  - Podle Cosinové věty je $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|\|y\| \cos(\theta)$.
  - Pro $z = x - y$ podle $\|z\|^2 = z_1^2 + z_2^2$ a linearity pak máme

$$\|x\|^2 - 2\sum_{i=1}^{2} x_i y_i + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|\|y\| \cos(\theta).$$

Standardní skalární součin



- $\langle x, y\rangle$ je součin délky $\|y\|$ s délkou $\|p(x)\|$ projekce $p(x)$ vektoru x na $\mathrm{span}\{y\}$. Tedy $\langle x, y\rangle = \|p(x)\| \cdot \|y\| = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos(\theta)$.
- Proč platí $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$?
  - Uvažme trojúhelník se stranami x, y a $x - y$.
  - Podle Cosinové věty je $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|\|y\|\cos(\theta)$.
  - Pro $z = x - y$ podle $\|z\|^2 = z_1^2 + z_2^2$ a linearity pak máme

$$\|x\|^2 - 2\sum_{i=1}^{2} x_i y_i + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|\|y\|\cos(\theta).$$

  - Odsud už dostáváme $\sum_{i=1}^{2} x_i y_i = \|x\|\|y\|\cos(\theta)$.

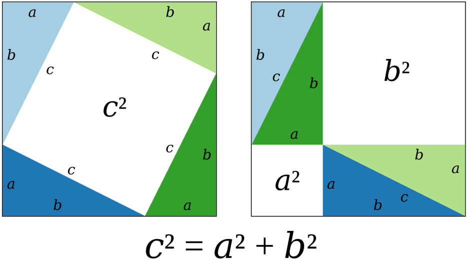
Pythagorova věta

Pythagorova věta

- Pro každé kolmé $x, y \in V$ platí $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Pythagorova věta

- Pro každé kolmé $\color{red}{x, y}$ $\in V$ platí $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.
- "...proven numerous times by many different methods — possibly the most for any mathematical theorem."

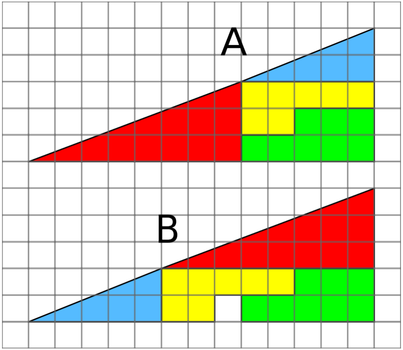


Obrázek: Pythagoras (570–495 př.n.l).

Zdroje: https://www.akg-images.com/ a https://en.wikipedia.org

Pythagorova věta

- Pro každé kolmé $x, y \in V$ platí $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.
- "...proven numerous times by many different methods — possibly the most for any mathematical theorem."



Obrázek: Pythagoras (570–495 př.n.l).

Zdroje: https://www.akg-images.com/ a https://en.wikipedia.org

Cauchyho–Schwarzova nerovnost

Cauchyho–Schwarzova nerovnost

- Pro každé $x, y \in V$ platí $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

Obrázek: Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) a Hermann Schwarz (1843–1921).

Zdroje: https://sapaviva.com a https://en.wikipedia.org

Cauchyho–Schwarzova nerovnost

- Pro každé $x, y \in V$ platí $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

Obrázek: Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) a Hermann Schwarz (1843–1921).

Zdroje: https://sapaviva.com a https://en.wikipedia.org

- Jedna z nejdůležitějších nerovností v matematice.

Cauchyho–Schwarzova nerovnost

- Pro každé $x, y \in V$ platí $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

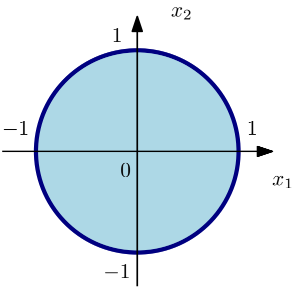
Obrázek: Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) a Hermann Schwarz (1843–1921).

Zdroje: https://sapaviva.com a https://en.wikipedia.org

- Jedna z nejdůležitějších nerovností v matematice.
- Spojuje skalární součin s délkami daných vektorů.

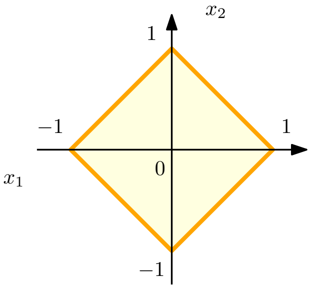
Koule $\{x \in \mathbb{R}^2\colon \|x\|_p \leq 1\}$ v p-normách

Koule $\{x \in \mathbb{R}^2 \colon \|x\|_p \leq 1\}$ v p-normách



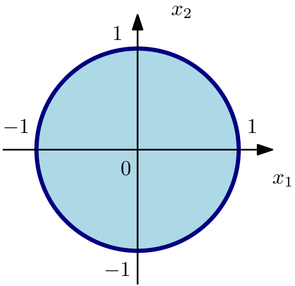
$p = 2$: Eukleidovská norma

Koule $\{x \in \mathbb{R}^2 \colon \|x\|_p \leq 1\}$ v p-normách



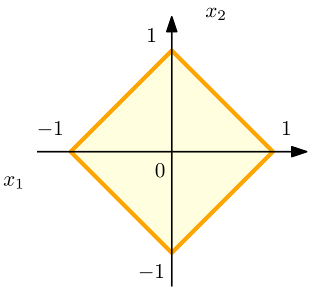
$p = 1$: součtová norma

(Manhattonovská norma)

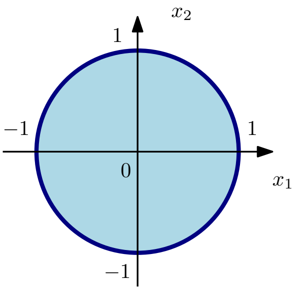


$p = 2$: Eukleidovská norma

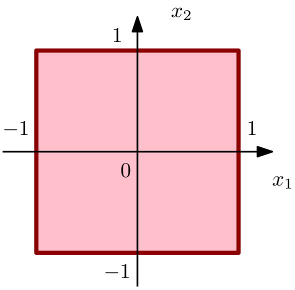
Koule $\{x \in \mathbb{R}^2 \colon \|x\|_p \leq 1\}$ v p-normách



$p = 1$: součtová norma
(Manhattonovská norma)

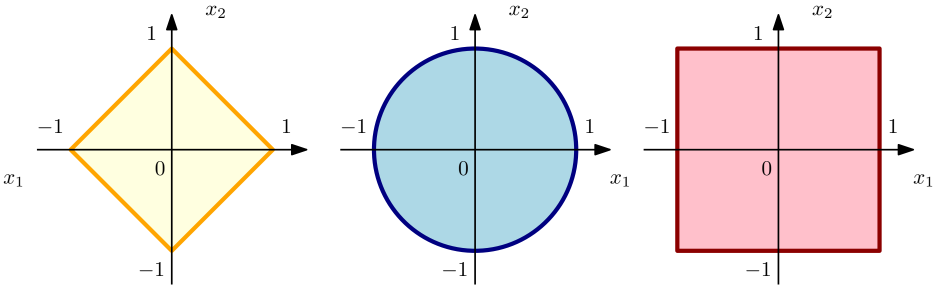


$p = 2$: Eukleidovská norma



$p = \infty$: maximová norma

Koule $\{x \in \mathbb{R}^2 \colon \|x\|_p \le 1\}$ v p-normách



$p = 1$: součtová norma
(Manhattonovská norma)

$p = 2$: Eukleidovská norma

$p = \infty$: maximová norma

- V $\mathbb{R}^n$ existuje bijekce mezi normami a konvexními tělesy symetrickými podle počátku.

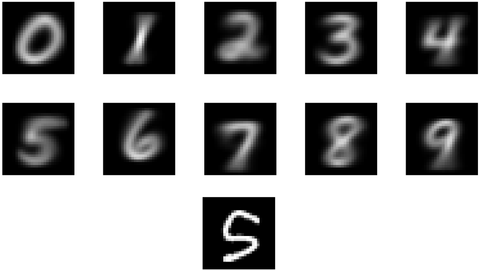
Koule $\{x \in \mathbb{R}^2 \colon \|x\|_p \leq 1\}$ v p-normách

Zdroj: https://subscription.packtpub.com/

Aplikace: klasifikace psaných číslic

Aplikace: klasifikace psaných číslic

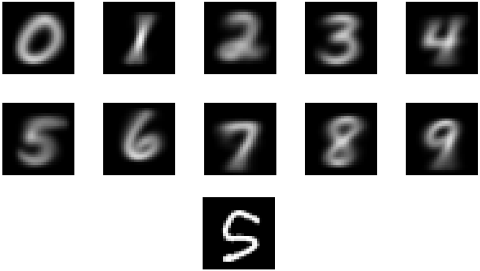
- Chceme mít automatickou identifikaci ručně psaných číslic.



Zdroj: M. Hladík: Lineární algebra (nejen) pro informatiky

Aplikace: klasifikace psaných číslic

- Chceme mít automatickou identifikaci ručně psaných číslic.

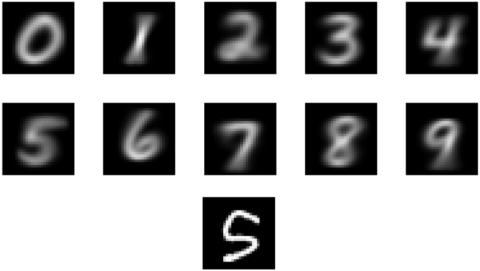


Zdroj: M. Hladík: Lineární algebra (nejen) pro informatiky

- Pixel obrázku $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ má na pozici (i, j) barvu s číslem $a_{i,j}$.

Aplikace: klasifikace psaných číslic

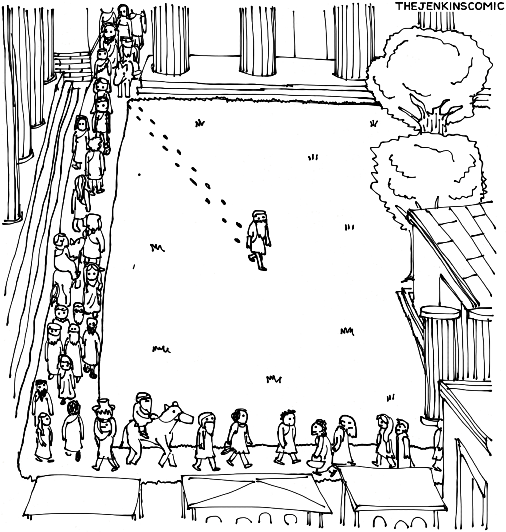
- Chceme mít automatickou identifikaci ručně psaných číslic.



Zdroj: M. Hladík: Lineární algebra (nejen) pro informatiky

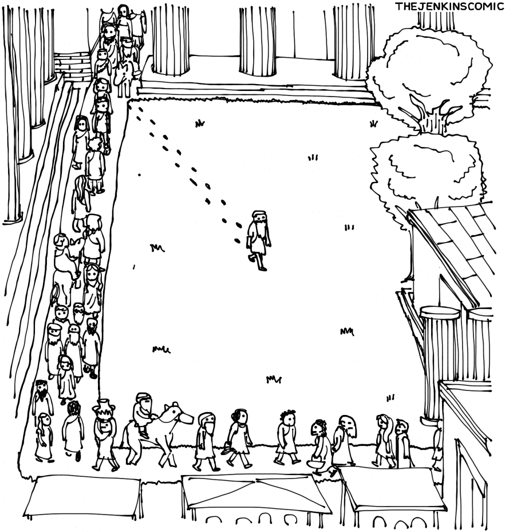
- Pixel obrázku $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ má na pozici (i, j) barvu s číslem $a_{i,j}$.
- Při vzdálenosti $d(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (a_{i,j} - b_{i,j})^2}$ dostaneme vzdálenosti od vzorů

0: 1957,44	1: 2237,30	2: 2015,79	3: 1816,23	4: 1868,78
5: 1771,64	6: 2038,57	7: 2090,51	8: 1843,22	9: 1900,81



"UGH, THERE GOES THAT PYTHAGORAS GUY"

Zdroj: https://reddit.com



"UGH, THERE GOES THAT PYTHAGORAS GUY"

Zdroj: https://reddit.com

Děkuji za pozornost.