VEKTOROVÉ PROSTORY:

TVRZENÍ 7.1 (ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI VEKTOROVÝCH PROSTORŮ):
VE VEKTOROVÉM PROSTORU V NAD TĚLESEM $\mathbb{T}$ A KAŽDÉ $\alpha \in \mathbb{T}$, $v \in V$ PLATÍ:

1) $0v = \sigma$,
2) $\alpha\sigma = \sigma$,
3) $\alpha v = \sigma \Rightarrow \alpha = 0$ NEBO $v = \sigma$
4) $-v = (-1)v$

- DŮKAZ JE ANALOGICKÝ DŮKAZU TVRZENÍ 6.1

- JE-LI V VEKTOROVÝ PROSTOR NAD TĚLESEM $\mathbb{T}$, PAK $U \subseteq V$ JE **PODPROSTOREM** V, POKUD U TVOŘÍ VEKTOROVÝ PODPROSTOR NAD $\mathbb{T}$ SE STEJNĚ DEFINOVANÝMI OPERACEMI
  - ZNAČÍME $U \Subset V$
- EKVIVALENTNĚ U MUSÍ MÍT NULOVÝ VEKTOR A BÝT UZAVŘENÉ NA OBĚ OPERACE:

TVRZENÍ 7.2:
PODMNOŽINA U VEKTOROVÉHO PROSTORU V NAD TĚLESEM $\mathbb{T}$ JE PODPROSTOREM V PRÁVĚ TEHDY, KDYŽ PLATÍ:

1) $\sigma \in U$,
2) $\forall u, v \in U: u + v \in U$: (UZAVŘENOST NA SČÍTÁNÍ)
3) $\forall \alpha \in \mathbb{T}, u \in U: \alpha u \in U$ (UZAVŘENOST NA NÁSOBENÍ SKALÁREM)

- DŮKAZ:
  i) $\Rightarrow$: POKUD $U \Subset V$, PAK U TYTO TŘI VLASTNOSTI SPLŇUJE (U JE TOTIŽ VEKTOROVÝM PROSTOREM)
  ii) $\Leftarrow$: SPLŇUJE-LI U TYTO 3 VLASTNOSTI, PAK SPLŇUJE I VLASTNOSTI Z DEFINICE VEKTOROVÉHO PROSTORU
  - PLATÍ TOTIŽ PRO V A TEDY I PRO $U \subseteq V$
  - UZAVŘENOST U NA OPAČNÉ VEKTORY PLYNE Z UZAVŘENOSTI NA NÁSOBKY A Z $(-1)u = -u$ (ČÁST 4) TVRZENÍ 7.1) $\boxtimes$

- **PŘÍKLADY** (VÍCE V PREZENTACI):
  - TRIVIÁLNÍ PODPROSTORY: $V \Subset V$, $\{o\} \Subset V$
  - $P \Subset F$
  - PŘÍMKA PROCHÁZEJÍCÍ POČÁTKEM $\Subset \mathbb{R}^2$

- TVRZENÍ 7.3: JE-LI V VEKTOROVÝ PROSTOR NAD TĚLESEM $\mathbb{T}$, PAK PRŮNIK LIBOVOLNÉHO SYSTÉMU $(V_i)_{i \in I}$ VEKTOROVÝCH PODPROSTORŮ PROSTORU V JE VEKTOROVÝM PODPROSTOREM.

DŮKAZ:
- PODLE TVRZENÍ 7.2 STAČÍ OVĚŘIT $o \in \bigcap_{i \in I} V_i$ A UZAVŘENOST NA SČÍTÁNÍ VEKTORŮ A NÁSOBENÍ SKALÁREM
- PROTOŽE $o \in V_i$ PRO KAŽDÉ $i \in I$, TAK $\underline{\underline{o \in \bigcap_{i \in I} V_i}}$
- $u, v \in \bigcap_{i \in I} V_i \Rightarrow u, v \in V_i$ PRO KAŽDÉ $i \in I \Rightarrow u + v \in V_i$ PRO KAŽDÉ $i \in I \Rightarrow u + v \in \bigcap_{i \in I} V_i \Rightarrow$ UZAVŘENOST NA $+$
  V_i JE PODPROSTOREM
- $\alpha \in \mathbb{T}, u \in \bigcap_{i \in I} V_i \Rightarrow \alpha \in \mathbb{T}, u \in V_i$ PRO KAŽDÉ $i \in I \Rightarrow \alpha u \in V_i$ PRO KAŽDÉ $i \in I \Rightarrow \alpha u \in \bigcap_{i \in I} V_i \Rightarrow$ UZAVŘENOST NA $\cdot$ $\boxtimes$

- PRO VEKTOROVÝ PROSTOR V NAD $\mathbb{T}$ JE LINEÁRNÍM OBALEM MNOŽINY $W \subseteq V$ PRŮNIK $\bigcap U$ VŠECH PODPROSTORŮ U PROSTORU V OBSAHUJÍCÍCH W
  $W \subseteq U \Subset V$
  - ZNAČÍME $\mathrm{SPAN}(W)$ (PODLE TVRZENÍ 7.3 JE TO PODPROSTOR V)
  - JE-LI $U = \mathrm{SPAN}(W)$, PAK W GENERUJE PROSTOR U A PRVKY MNOŽINY W JSOU GENERÁTORY U
  - U JE KONEČNĚ GENEROVANÝ, POKUD JE GENEROVANÝ NĚJAKOU KONEČNOU MNOŽINOU VEKTORŮ

- JE-LI V VEKTOROVÝM PROSTOR NAD $\mathbb{T}$ A $v_1, \dots, v_m \in V$, PAK LINEÁRNÍ KOMBINACÍ VEKTORŮ $v_1, \dots, v_m$ ROZUMÍME VÝRAZ TYPU
$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m, \text{ KDE } \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{T}$$

(3)

- **VĚTA 7.4** (GENEROVÁNÍ LINEÁRNÍMI KOMBINACEMI):
NECHŤ V JE VEKTOROVÝ PROSTOR NAD $\mathbb{T}$ A $v_1, \ldots, v_m \in V$. POTOM
$$\mathrm{span}\{v_1, \ldots, v_m\} = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i \;:\; \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{T} \right\}$$

- DŮKAZ:
  i) $\supseteq$: $\mathrm{span}\{v_1, \ldots, v_m\}$ JE Z DEFINICE PODPROSTOREM V OBSAHUJÍCÍM $v_1, \ldots, v_m$. Z UZAVŘENOSTI NA $+$ A $\cdot$ (TVRZENÍ 7.2) OBSAHUJE VŠECHNY LINEÁRNÍ KOMBINACE $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i$
  ii) $\subseteq$: STAČÍ UKÁZAT, ŽE $M = \{ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i \;:\; \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{T} \}$ JE PODPROSTOREM V OBSAHUJÍCÍM $v_1, \ldots, v_m$ (Z DEFINICE LINEÁRNÍHO OBALU)

PODLE TVRZENÍ 7.2 JE M PODPROSTOREM V OBSAHUJÍCÍM $v_1, \ldots, v_m$ ⇐

- $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0$ DÁVÁ $\underline{o \in M}$, PODOBNĚ $v_1, \ldots, v_m \in M$
- UZAVŘENOST NA $+$: PRO $u = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i$, $v = \sum_{i=1}^{m} \beta_i v_i$ JE
$$u + v = \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i + \beta_i) v_i \in M$$
- UZAVŘENOST NA $\cdot$: PRO $u = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i$, $\alpha \in \mathbb{T}$ JE
$$\alpha u = \sum_{i=1}^{m} (\alpha \cdot \alpha_i) v_i \in \mathbb{T}$$
$\boxtimes$

- **LINEÁRNÍ NEZÁVISLOST**:
  - MOTIVACE: NAJÍT MNOŽINU GENERÁTORŮ MINIMÁLNÍ CO DO INKLUZE
  - JE-LI V VEKTOROVÝ PROSTOR NAD $\mathbb{T}$, PAK VEKTORY $v_1, \ldots, v_n \in V$ JSOU **LINEÁRNĚ NEZÁVISLÉ**, POKUD $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i = o$ NASTANE POUZE PRO
$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$$
  - V OPAČNÉM PŘÍPADĚ JSOU $v_1, \ldots, v_n$ **LINEÁRNĚ ZÁVISLÉ**, NE VŠECHNA NULOVÁ TAKOVÁ, (NEBOLI POKUD EXISTUJÍ $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{T}$ ŽE $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i = o$)
  - DEFINICE LINEÁRNÍ (NE)ZÁVISLOSTI SE DÁ ROZŠÍŘIT, NA $\underline{\text{NEKONEČNOU}}$ MNOŽINU VEKTORŮ M: M JE **LINEÁRNĚ NEZÁVISLÁ**, POKUD KAŽDÁ KONEČNÁ PODMNOŽINA M JE LINEÁRNĚ NEZÁVISLÁ
    → JINAK JE M **LINEÁRNĚ ZÁVISLÁ**

- **VĚTA 7,5** (CHARAKTERIZACE LINEÁRNÍ NEZÁVISLOSTI):

NECHŤ V JE VEKTOROVÝ PROSTOR NAD $\mathbb{T}$. PAK VEKTORY $v_1, \dots, v_m \in V$ JSOU LINEÁRNĚ ZÁVISLÉ PRÁVĚ TEHDY, KDYŽ EXISTUJE $k \in \{1, \dots, m\}$ A $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{T}$ TAKOVÁ, ŽE $v_k = \sum_{i \neq k} \alpha_i v_i$.

- NEBOLI $v_k \in \text{SPAN}\{v_1, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_m\}$

PODLE **VĚTY 7.4**

- DŮKAZ:

i) $\Rightarrow$: $v_1, \dots, v_m$ LINEÁRNĚ ZÁVISLÉ $\Rightarrow \exists \beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{T}$ TAKOVÉ, ŽE $\sum_{i=1}^{m} \beta_i v_i = o$ A $\beta_k \neq 0$ PRO NĚJAKÉ k

- PAK $\beta_k v_k = -\sum_{i \neq k} \beta_i v_i$ A TEDY $v_k = \sum_{i \neq k} \left(\frac{-\beta_i}{\beta_k} \right) v_i$

ii) $\Leftarrow$: NECHŤ $v_k = \sum_{i \neq k} \beta_i v_i$, PAK $v_k - \sum_{i \neq k} \beta_i v_i = o$, COŽ JE NETRIVIÁLNÍ LINEÁRNÍ KOMBINACE ROVNÁ o $\Rightarrow$
$\Rightarrow v_1, \dots, v_m$ JSOU LINEÁRNĚ ZÁVISLÉ ⊗

- **DŮSLEDEK 7.6**:

NECHŤ V JE VEKTOROVÝ PROSTOR NAD $\mathbb{T}$ A $v_1, \dots, v_m \in V$. PAK $v_1, \dots, v_m$ JSOU LINEÁRNĚ ZÁVISLÉ PRÁVĚ TEHDY, KDYŽ EXISTUJE $k \in \{1, \dots, m\}$ TAKOVÉ, ŽE $\text{SPAN}\{v_1, \dots, v_m\} = \text{SPAN}\{v_1, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_m\}$

„v_k JE ZBYTEČNÝ GENERÁTOR"

- DŮKAZ:

1) $\Rightarrow$: JSOU-LI $v_1, \dots, v_m$ LINEÁRNĚ ZÁVISLÉ, PAK Z **VĚTY 7.5** MÁME $k \in \{1, \dots, m\}$ A $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{T}$ TAKOVÉ, ŽE
$v_k = \sum_{i \neq k} \alpha_i v_i$

INKLUZE $\subseteq$ DOSTANEME

- INKLUZE $\supseteq$ JE PAK TRIVIÁLNÍ A INKLUZI $\subseteq$ DOSTANEME JAKO ZE ZÁPISU LIBOVOLNÉHO $u \in \text{SPAN}\{v_1, \dots, v_m\}$ JAKO

$u = \sum_{i=1}^{m} \beta_i v_i = \beta_k v_k + \sum_{i \neq k} \beta_i v_i = \beta_k \left(\sum_{i \neq k} \alpha_i v_i \right) + \sum_{i \neq k} \beta_i v_i =$

$= \sum_{i \neq k} (\beta_k \alpha_i + \beta_i) v_i \Rightarrow u \in \text{SPAN}\{v_1, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_m\}$

2) $\Leftarrow$: platí-li rovnost, pak $v_k \in \operatorname{span}\{v_1,\dots,v_m\} =$ (5)

$= \operatorname{span}\{v_1,\dots,v_{k-1},v_{k+1},\dots,v_m\}$ triviálně   rovnost ze znění

– podle Věty 7.5 jsou tak $v_1,\dots,v_m$ lineárně závislé $\boxtimes$

– **Báze**:

– nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{T}$. Pak **bází** V je jakýkoliv lineárně nezávislý systém generátorů V

– jedná se o systém generátorů V minimální co do inkluze (vynecháním libovolného generátoru nevygenerujeme celé V)

– bázi s vektory $v_1,\dots,v_m$ někdy značíme $\{v_1,\dots,v_m\}$, ale bází myslíme uspořádanou množinu