INVERZNÍ MATICE:

- motivace – chceme inverzní prvky pro součin matic (jde to vždy?)
- **inverzní matici** k matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je matice A^{-1} splňující

  čtvercová

  $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

- **VĚTA 4.1** (**O existenci inverzní matice**):

  Buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Je-li A regulární, pak k ní existuje inverzní matice A je určená jednoznačně. Naopak, existuje-li k A inverzní matice, pak A musí být regulární.

- Důkaz:

  1) existence – A je regulární $\Rightarrow$ $Ax = e_j$ má jediné řešení x_j pro $j = 1, \dots, n$

     tvrzení 3.4

     - vytvoříme matici $A^{-1} := \begin{pmatrix} | & & | \\ x_1 & \dots & x_n \\ | & & | \end{pmatrix}$, ukážeme po sloupcích rovnost $AA^{-1} = I_n$
     - $(AA^{-1})_{*j} = A(A^{-1})_{*j} = Ax_j = e_j = I_{*j}$ $\Rightarrow$ $AA^{-1} = I_n$

       tvrzení 3.2 volba A^{-1} volba x_j

     - rovnost $A^{-1}A = I_n$ ukážeme trikem. Ukážeme výraz

       $A(A^{-1}A - I_n) = AA^{-1}A - A = I_nA - A = 0$

       $\Rightarrow A(A^{-1}A - I_n)$ je nulová matice $\Rightarrow A(A^{-1}A - I_n)_{*j} = 0$

     - A je regulární $\Rightarrow (A^{-1}A - I_n)_{*j} = 0$ pro $\forall j$ $\Rightarrow A^{-1}A - I_n = 0$

       $\Rightarrow A^{-1}A = I_n$

  2) jednoznačnost – nechť $\exists B$: $BA = AB = I_n$

     - potom $B = BI_n = B(AA^{-1}) = (BA)A^{-1} = IA^{-1} = A^{-1}$ $\Rightarrow B = A^{-1}$

  3) naopak – nechť má A inverz, buď x takové, že $Ax = 0$

     - pak $x = I_nx = (A^{-1}A)x = A^{-1}(Ax) = A^{-1}0 = 0$ $\Rightarrow$ A regulární ☒

- snadno nyní vidíme, že je-li A regulární, pak je i A^T regulární

  VĚTA 4.1

- Důkaz:
  - A je regulární $\Rightarrow \exists A^{-1}$: $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$
  - transpozicí dostáváme $(AA^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I_n^T$
  - neboli $(A^{-1})^TA^T = A^T(A^{-1})^T = I_n$ VĚTA 4.1

  $\Rightarrow A^T$ má inverzní matici $(A^{-1})^T$ a tedy A^T je regulární ☒

- matici $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ značíme A^{-T}

– VE SKUTEČNOSTI NÁM STAČÍ JEN JEDNA ROVNOST V DEFINICI A^{-1}

– **VĚTA 4.2**: NECHŤ $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. POKUD $BA = I_n$, PAK JSOU A, B REGULÁRNÍ A NAVZÁJEM K SOBĚ INVERZNÍ → TEDY $A = B^{-1}$, $B = A^{-1}$

– DŮKAZ:

– $BA = I_n \overset{I_n \text{ JE REGULÁRNÍ}}{\Rightarrow} BA$ JE REGULÁRNÍ $\overset{\text{VLASTNOST REGULARITY A SOUČINU}}{\Rightarrow} A, B$ JSOU REGULÁRNÍ $\overset{\text{VĚTA 4.1}}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow \exists$ INVERZNÍ MATICE A^{-1}, B^{-1}

– MÁME $B = BI_n \underset{\text{INVERZ}}{=} B(AA^{-1}) \underset{\text{ASOCIATIVITA}}{=} (BA)A^{-1} \underset{BA = I_n}{=} I_n \cdot A^{-1} = \underline{\underline{A^{-1}}}$

A TAKÉ $A = AI_n \overset{\text{INVERZ}}{=} A(BB^{-1}) \overset{\text{ASOCIATIVITA}}{=} (AB)B^{-1} \underset{B = A^{-1}}{=} I_n B^{-1} = B^{-1}$ $\boxtimes$

– **VÝPOČET INVERZNÍ MATICE**:

– NÁVOD JE VE VĚTĚ 4.1, STAČÍ NAJÍT ŘEŠENÍ x_j, COŽ LZE PŘEVODEM NA RREF

– **VĚTA 4.3**: BUĎ $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. JE-LI $RREF(A | I_n) = (I_n | B)$, PAK $B = A^{-1}$. NENÍ-LI ZAČÁTEK $RREF(A | I_n)$ ROVEN I_n, PAK JE A SINGULÁRNÍ.

– DŮKAZ:

– POKUD $RREF(A | I_n) = (B | I_n)$, PAK $\overset{\text{VĚTA 3.5}}{\exists}$ REGULÁRNÍ Q TAKOVÁ, ŽE $(I_n | B) = Q(A | I_n)$. NEBOLI $\underbrace{I_n = QA}_{\Downarrow}$, $\underbrace{B = QI_n}_{\Downarrow}$

VĚTA 4.2 ← $Q = A^{-1} \Rightarrow B = Q = A^{-1}$

– POKUD ZAČÁTEK $RREF(A | I_n)$ NENÍ I_n, PAK $RREF(A) \neq I_n$ A TEDY A JE SINGULÁRNÍ $\boxtimes$

- NA ZÁVĚR UVEĎME VLASTNOSTI INVERZNÍ MATICE

- TVRZENÍ 4.4:

PRO REGULÁRNÍ $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ A REÁLNÉ ČÍSLO $\alpha \neq 0$ PLATÍ:

1) $(A^{-1})^{-1} = A$,

2) $(A^{-1})^{T} = (A^{T})^{-1}$,

3) $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$,

4) $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.

- DŮKAZ:

1) Z ROVNOSTI $A^{-1}A = I_n$ VYPLÝVÁ, ŽE INVERZNÍ MATICÍ K A^{-1} JE A

2) UŽ MÁME UKÁZANÉ

3) PLYNE Z $(\alpha A)(\frac{1}{\alpha} A^{-1}) = \frac{\alpha}{\alpha}(AA^{-1}) = I_n$

4) PLYNE Z $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A I_n A^{-1} = AA^{-1} = I_n$

$\boxtimes$