- IZOMORFISMUS:
  - TVRZENÍ 12.6 (VLASTNOSTI IZOMORFISMU):
    1) JE-LI $f: U \to V$ IZOMORFISMUS, PAK $f^{-1}: V \to U$ EXISTUJE A JE TO TAKÉ IZOMORFISMUS
    2) JSOU-LI $f: U \to V$ A $g: V \to W$ IZOMORFISMY, PAK JE $g \cdot f: U \to W$ TAKÉ IZOMORFISMUS
    3) $f: U \to V$ JE IZOMORFISMEM $\iff$ LIBOVOLNÁ BÁZE PROSTORU U SE ZOBRAZÍ NA BÁZI PROSTORU V
    4) JE-LI $f: U \to V$ IZOMORFISMUS, PAK $\dim(U) = \dim(V)$.

- POKRAČOVÁNÍ DŮKAZU:
  3) $\Rightarrow$: BUĎ $x_1, \dots, x_n$ BÁZE U
    - f JE PROSTÉ $\Rightarrow$ PODLE TVRZENÍ 11.4 JSOU $f(x_1), \dots, f(x_n)$ LINEÁRNĚ NEZÁVISLÉ
    - f JE NA $\Rightarrow$ PODLE TVRZENÍ 11.2 VEKTORY $f(x_1), \dots, f(x_n)$ GENERUJÍ $f(U) = V$

    $\Rightarrow f(x_1), \dots, f(x_n)$ JE BÁZÍ V

  $\Leftarrow$: NECHŤ $x_1, \dots, x_n$ JE BÁZÍ U A $f(x_1), \dots, f(x_n)$ JE BÁZÍ V POUŽIJEME TVRZENÍ 11.4
    - PAK f JE ZŘEJMĚ NA
    - f JE I PROSTÉ - SPOREM - NECHŤ $Ker(f)$ OBSAHUJE NENULOVÝ VEKTOR
    - TEDY NĚJAKÁ NETRIVIÁLNÍ LINEÁRNÍ KOMBINACE SPLŇUJE $f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) = o$. Z LINEARITY PAK MÁME $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i) = o$, COŽ JE SPOR S LINEÁRNÍ NEZÁVISLOSTÍ $f(x_1), \dots, f(x_n)$ ⊠

  4) PLYNE PŘÍMO Z 3)

- PODLE NÁSLEDUJÍCÍHO TVRZENÍ JE VIDĚT VZTAH MEZI MATICÍ f A f^{-1}

- TVRZENÍ 13.1: JE-LI $f: U \to V$ IZOMORFISMUS, B_U BÁZE U A B_V BÁZE V, PAK PLATÍ

$${}_{B_U}[f^{-1}]_{B_V} = {}_{B_V}[f]_{B_U}^{-1}$$

→ INVERZNÍ MATICE K ${}_{B_V}[f]_{B_U}$

- DŮKAZ: PROTOŽE $f^{-1} \circ f = id$, TAK ${}_{B_U}[f^{-1}]_{B_V} \cdot {}_{B_V}[f]_{B_U} = {}_{B_V}[id]_{B_U} = I$.
  PROTOŽE JE ${}_{B_V}[f]_{B_U}$ PODLE TVRZENÍ 12.6 ČTVERCOVÁ, JE ${}_{B_U}[f^{-1}]_{B_V}$ JEJÍ INVERZ ⊠

- TEDY MATICE ISOMORFISMUS JE REGULÁRNÍ
- PLATÍ TO I NAOPAK, JE-LI MATICE A REGULÁRNÍ, PAK JE A ISOMORFISMEM

- TVRZENÍ 13.2:
  LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ $A: U \to V$ JE ISOMORFISMUS $\Leftrightarrow$ NĚJAKÁ (LIBOVOLNÁ) MATICE REPREZENTUJÍCÍ A JE REGULÁRNÍ $\boxtimes$

- JAKO DALŠÍ DŮSLEDEK TVRZENÍ 13.1 DOSTÁVÁME VZTAH MEZI MATICEMI PŘECHODU MEZI BÁZEMI B_U A B_V: ${}_{B_V}[id]_{B_U} = {}_{B_U}[id]^{-1}_{B_V}$

NYNÍ POSTUPNĚ UKÁŽEME, ŽE VŠECHNY n-DIMENZIONÁLNÍ PROSTORY NAD STEJNÝM TĚLESEM JSOU ISOMORFNÍ

- TVRZENÍ 13.3:
  JE-LI V VEKTOROVÝM PROSTOREM NAD TĚLESEM $\mathbb{T}$ S DIMENZÍ n A BÁZÍ B, PAK ZOBRAZENÍ $x \mapsto [x]_B$ JE ISOMORFISMEM MEZI V A $\mathbb{T}^n$ NAD $\mathbb{T}$.

  - DŮKAZ:
    - BUĎ $v_1, \dots, v_n$ VEKTORY B. UŽ JSME NAHLÉDLI, ŽE $x \mapsto [x]_B$ JE LINEÁRNÍ. PROSTOTA PLYNE Z JEDNOZNAČNOSTI SOUŘADNIC (VĚTA 9.2) A ZOBRAZENÍ JE NA, PROTOŽE KAŽDÉ $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{T}^n$ JE SOUŘADNICÍ NĚJAKÉHO VEKTORU Z V (KONKRÉTNĚ $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$) $\boxtimes$

- VĚTA 13.4:
  VŠECHNY n-DIMENZIONÁLNÍ VEKTOROVÉ PROSTORY NAD TĚLESEM $\mathbb{T}$ JSOU NAVZÁJEM ISOMORFNÍ.

  DŮKAZ:
  PODLE TVRZENÍ 13.3 JSOU VŠECHNY TAKOVÉ PROSTORY ISOMORFNÍ S $\mathbb{T}^n$ A TÍM I MEZI SEBOU PROTOŽE SLOŽENÍM ISOMORFISMŮ JE ISOMORFISMUS (TVRZENÍ 12.6) $\boxtimes$

- Pro lineární zobrazení $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ určené maticí ($f(x) = Ax$) ③

platí $Ker(f) = Ker(A)$ a $f(\mathbb{R}^n) = \mathcal{S}(A)$. Podobné vztahy platí i obecněji:

- **Věta 13.5:**
  Je-li $f: U \to V$ lineární zobrazení, B_U báze U a B_V báze V,
  pak pro $A = {}_{B_V}[f]_{B_U}$ platí:
  1) $\dim(Ker(f)) = \dim(Ker(A))$,
  2) $\dim(f(U)) = \dim(\mathcal{S}(A)) = rank(A)$.

- Důkaz:

1) Podle **Tvrzení 12.6** stačí sestrojit isomorfismus mezi $Ker(f)$ a $Ker(A)$. Isomorfismem je například $x \in Ker(f) \mapsto [x]_{B_U}$. Podle **Tvrzení 13.3** je lineární a prosté. Je i na, protože pro každé $[x]_{B_U} \in Ker(A)$ je $f(x) = o$.

pro $x \in Ker(f)$ je také $o = [o]_{B_V} \underset{x \in Ker(f)}{=} [f(x)]_{B_V} \underset{\text{Věta 12.1}}{=} {}_{B_V}[f]_{B_U} \cdot [x]_{B_U}$

a tedy $[x]_{B_U} \in Ker(A)$.
↪ zobrazení má jen obor hodnot v $Ker(A)$

2) Buď $n = \dim(U)$ a $m = \dim(V)$. Sestrojíme isomorfismus mezi $f(U)$ a $\mathcal{S}(A)$ předpisem $y \in f(U) \mapsto [y]_{B_V}$, a použijeme **Tvrzení 12.6**. **Tvrzení 13.3** $\Rightarrow$ zobrazení je lineární a prosté. Dále pro $y \in f(U)$ $\exists x \in U : y = f(x)$. Nyní $[y]_{B_V} = [f(x)]_{B_V} \underset{\text{Věta 12.1}}{=} A[x]_{B_U}$.

$\Rightarrow [y]_{B_V} \in \mathcal{S}(A)$. Zobrazení je na, protože pro každé $b \in \mathcal{S}(A)$ $\exists a \in T^n : b = Aa$. Čili pro vektor $x \in U$, pro který $a = [x]_{B_U}$, platí $y := f(x) \in f(U)$ a zároveň $[y]_{B_V} =$

$= [f(x)]_{B_V} = A \cdot [x]_{B_U} = Aa = b \in \mathcal{S}(A)$ ⊠

- DOSTÁVÁME ANALOGII VĚTY 10.8

- **DŮSLEDEK 13.6:**
  JE-LI $f: U \to V$ LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ, PAK PLATÍ

$$\dim(U) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(f(U))$$

- DŮKAZ:
  - PODLE **VĚTY 10.8** PLATÍ PRO $A \in T^{m \times n}$: $n = \dim(\mathrm{Ker}(A)) + \dim(\mathrm{Im}(A))$
  - PRO $A = {}_{B_V}[f]_{B_U}$ PAK ZBYTEK PLYNE Z **VĚTY 13.5** $\boxtimes$

  - NAVÍC f JE PROSTÉ $\Leftrightarrow$ $\dim(U) = \dim(f(U))$ $\Leftrightarrow$ ${}_{B_V}[f]_{B_U}$ MÁ LINEÁRNĚ NEZÁVISLÉ SLOUPCE $(\dim(U) = \mathrm{rank}({}_{B_V}[f]_{B_U}))$
  - f JE NA $\Leftrightarrow$ $\dim(V) = \dim(f(U))$ $\Leftrightarrow$ ${}_{B_V}[f]_{B_U}$ MÁ LINEÁRNĚ NEZÁVISLÉ ŘÁDKY $(\dim(V) = \mathrm{rank}({}_{B_V}[f]_{B_U}))$

- **PROSTOR LINEÁRNÍCH ZOBRAZENÍ:**
  - MNOŽINA $\{f: U \to V : f \text{ JE LINEÁRNÍ}\}$ S OPERACEMI SČÍTÁNÍ ZOBRAZENÍ
    (U: NAD T, V: NAD T)
    A S NÁSOBKY ZOBRAZENÍ TVOŘÍ VEKTOROVÝ PROSTOR. NULOVÝM PRVKEM JE ZOBRAZENÍ $u \mapsto o_V$ PRO KAŽDÉ $u \in U$
  - JE-LI $n = \dim(U)$, $m = \dim(V)$, PAK DIMENZE TOHOTO PROSTORU JE $m \cdot n$ (KAŽDÉ f JE URČENÉ MATICÍ $m \times n$ A TEDY JE PROSTOR ISOMORFNÍ S $T^{m \times n}$)

- JE-LI V VEKTOROVÝ PROSTOR NAD T, PAK **LINEÁRNÍ FORMOU** JE LIBOVOLNÉ LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ Z V DO T
- **DUÁLNÍM PROSTOREM V^*** JE PROSTOR VŠECH LINEÁRNÍCH FOREM

- JE-LI $n = \dim(V)$, PAK $n = \dim(V^*)$
- JE-LI $v_1, \dots, v_n$ BÁZI V, PAK V^* MÁ BÁZI $f_1, \dots, f_n$, KDE f_i JE URČENÉ OBRAZY BÁZE $f_i(v_i) = 1$ A $f_i(v_j) = 0$ PRO $i \neq j$
- PRO KONEČNĚ GENEROVANÉ V JE V ISOMORFNÍ S V^*, S V^{**}, ...
  - VÍCE VE FUNKCIONÁLNÍ ANALÝZE