- **VĚTA 10.8** (O DIMENZI JÁDRA A HODNOSTI MATICE):

  PRO KAŽDOU MATICI $A \in T^{m \times n}$ PLATÍ $\dim(\mathrm{Ker}(A)) + \mathrm{rank}(A) = n$.

- DŮKAZ:
  - PRO $k = \dim(\mathrm{Ker}(A))$ UVAŽME BÁZI $v_1, \dots, v_k$ $\mathrm{Ker}(A)$
  - PODLE **VĚTY 9.7** EXISTUJE BÁZE $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n$ PRO T^n
  - STAČÍ UKÁZAT, ŽE $Av_{k+1}, \dots, Av_n$ JE BÁZÍ $\mathcal{S}(A)$, PAK PODLE **VĚTY 10.7** JE $\mathrm{rank}(A) = \dim(\mathcal{S}(A)) = n - k$
  - GENERUJÍCNOST:
    - PRO KAŽDÉ $y \in \mathcal{S}(A)$ EXISTUJE $x \in T^n$ TAKOVÉ, ŽE $y = Ax$
    - x LZE ZAPSAT JAKO $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$. PO DOSAZENÍ MÁME

      $$y = Ax = A\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (Av_i) = \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i (Av_i)$$

      $v_1, \dots, v_k \in \mathrm{Ker}(A)$
  - LINEÁRNÍ NEZÁVISLOST:
    - NECHŤ $o = \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i (Av_i)$. PAK $A\left(\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i v_i\right) = o$ A TEDY $\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i v_i \in \mathrm{Ker}(A)$. PROTO $\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{k} \beta_i v_i$
    - TEDY $\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i v_i - \sum_{i=1}^{k} \beta_i v_i = o$
    - Z LINEÁRNÍ NEZÁVISLOSTI $v_1, \dots, v_n$ JE $\alpha_{k+1} = \dots = \alpha_n = \beta_1 = \dots = \beta_k = 0$ A TEDY $Av_{k+1}, \dots, Av_n$ JSOU LINEÁRNĚ NEZÁVISLÉ

$\boxtimes$

- **LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ**:
  - UŽ JSME SE SETKALI SE ZOBRAZENÍM $x \mapsto Ax$ PRO $A \in T^{m \times n}$
  - JISTĚ PLATÍ $x + y \mapsto A(x+y) = Ax + Ay$, $\alpha x \mapsto A(\alpha x) = \alpha Ax$
  - TUTO VLASTNOST POUŽIJEME JAKO DEFINICI
  - PRO VEKTOROVÉ PROSTORY U, V NAD T JE ZOBRAZENÍ $f: U \to V$ **LINEÁRNÍ**, POKUD PRO KAŽDÉ $x, y \in U$ A $\alpha \in T$ PLATÍ $f(x+y) = f(x) + f(y)$ A $f(\alpha x) = \alpha f(x)$

NEBOLI HOMOMORFISMUS

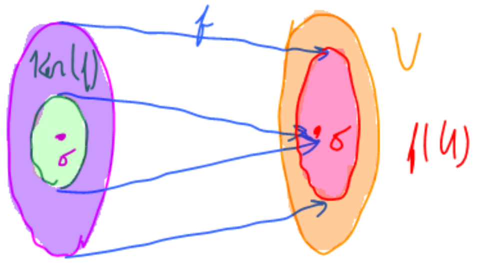
- **TVRZENÍ 11.1** (VLASTNOSTI LINEÁRNÍCH ZOBRAZENÍ):
  JE-LI $f: U \to V$ LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ, PAK PLATÍ
  1) $f\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f(x_i)$ PRO KAŽDÉ $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in T$, $x_1, \dots, x_m \in U$
  2) $f(o) = o$.

- DŮKAZ:
  1) Z DEFINICE PLATÍ PRO $m=2$, PRO VĚTŠÍ m STAČÍ UŽÍT DŮKAZ INDUKCÍ PODLE m ☒
  2) $f(o) = f(0 \cdot o) \underset{\text{LINEARITA}}{=} 0 \cdot f(o) = o$

⇒ LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ ZACHOVÁVÁ LINEÁRNÍ ZÁVISLOSTI (LINEÁRNÍ NEZÁVISLOST SE ZACHOVÁVAT NEMUSÍ)
LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ ZOBRAZUJÍ NA PŘÍMKU NEBO NA BOD
⇒ PŘÍMKU LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ

- MÁME-LI LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ $f: U \to V$, PAK DEFINUJEME
  - OBRAZ $f(U) := \{f(x) : x \in U\}$ — LZE ROZŠÍŘIT NA OBRAZ MNOŽINY $M \subseteq U$ JAKO $f(M) := \{f(x) : x \in M\}$
  - JÁDRO $Ker(f) := \{x \in U : f(x) = o\}$

- $Ker(f) = \{o\}$ ⇒ f JE PROSTÉ ⇒ DIMENZE VZORU U = DIMENZE $f(U)$
- VĚTŠÍ JÁDRO ⇒ MENŠÍ DIMENZE $f(U)$
- POKUD $f(x) = Ax$ PRO $A \in T^{m \times n}$, PAK $Ker(f) = Ker(A)$ A $f(U) = \mathcal{S}(A)$



- **TVRZENÍ 11.2**: PRO LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ $f: U \to V$ PLATÍ:
  1) $f(U)$ JE PODPROSTOREM V,
  2) $Ker(f)$ JE PODPROSTOREM U,
  3) PRO KAŽDÉ $x_1, \dots, x_m \in U$ PLATÍ $f(\mathrm{span}\{x_1, \dots, x_m\}) = \mathrm{span}\{f(x_1), \dots, f(x_m)\}$

- DŮKAZ: TVRZENÍ 11.1

1) Stačí ověřit $o \in f(U)$ a uzavřenost na součty a násobky
   - $f(o) = o \Rightarrow \underline{o \in f(U)}$
   - Pro $v_1, v_2 \in f(U)$ $\exists\, u_1, u_2 \in U$, kde $f(u_1) = v_1$, $f(u_2) = v_2$. Potom
     $v_1 + v_2 = f(u_1) + f(u_2) \underset{\text{linearita}}{=} f(u_1 + u_2) \Rightarrow \underline{\underline{v_1 + v_2 \in f(U)}}$
   - Pro $\alpha \in T$, $v \in V$ $\exists\, u \in U : f(u) = v$. Potom $\alpha v = \alpha f(u) \underset{\text{linearita}}{=}$
     $= f(\alpha u) \Rightarrow \underline{\underline{\alpha v \in f(U)}}$ $\boxtimes$

2) Analogické (cvičení)

3) Označme $W := \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_m\}$. Dokážeme obě inkluze:
   - $\subseteq$: Každé $w \in W$ lze zapsat jako $w = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i$ pro $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in T$
     Potom $f(w) = f\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i\right) \underset{\text{TVRZENÍ 11.1}}{=} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f(x_i) \in \operatorname{span}\{f(x_1), \dots, f(x_m)\}$
   - $\supseteq$: Protože $x_1, \dots, x_m \in W$, tak $f(x_1), \dots, f(x_m) \in f(W)$.
     ČÁST 1) $\Rightarrow f(W)$ je podprostor $\Rightarrow f(W) \supseteq \operatorname{span}\{f(x_1), \dots, f(x_m)\}$ $\boxtimes$

- **DŮSLEDEK 11.3:**
  Lineární zobrazení $f : U \to V$ je na ($f(U) = V$) $\Leftrightarrow$ nějaké generátory prostoru U se zobrazí přes f na generátory V

- Podobně se dají charakterizovat prostá ($\forall x, y \in U : x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$) zobrazení

- **VĚTA 11.4:**
  Pro lineární zobrazení $f : U \to V$ jsou následující tvrzení ekvivalentní:

  1) f je prosté,

  2) $\operatorname{Ker}(f) = \{o\}$,

  3) obrazem libovolné lineárně nezávislé množiny je lineárně nezávislá množina

4

- DŮKAZ:
  - DOKÁŽEME IMPLIKACE 1) ⇒ 2) ⇒ 3) ⇒ 1)

1) ⇒ 2):
PODLE TVRZENÍ 11.1 JE $f(o) = o$ A TEDY $o \in \operatorname{Ker}(f)$
PROTOŽE JE f PROSTÉ, TAK SE NA o NIC DALŠÍHO NEZOBRAZÍ
$\Rightarrow \underline{\underline{\operatorname{Ker}(f) = \{o\}}}$

2) ⇒ 3):
NECHŤ JSOU $x_1, \dots, x_m \in U$ LINEÁRNĚ NEZÁVISLÉ A $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i f(x_i) = o$
PAK $o = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f(x_i) = f\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i\right) \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i \in \operatorname{Ker}(f)$
TVRZENÍ 11.1
Z $\operatorname{Ker}(f) = \{o\}$ JE $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i = o$. PROTOŽE $x_1, \dots, x_m$ JSOU
LINEÁRNĚ NEZÁVISLÉ, TAK $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0 \Rightarrow f(x_1), \dots, f(x_n)$ JSOU
LINEÁRNĚ NEZÁVISLÉ

3) ⇒ 1):
SPOREM - NECHŤ $\exists x, y \in U: x \neq y$ A $f(x) = f(y)$
POTOM $o = f(x) - f(y) = f(x - y)$
$\{o\}$ JE LINEÁRNĚ ZÁVISLÁ A TEDY PODLE 3) JE $x - y$
LINEÁRNĚ ZÁVISLÁ $\Rightarrow x - y = o \Rightarrow x = y \Rightarrow$ SPOR S $x \neq y$ ⊠

$\Rightarrow$ f PROSTÉ $\Rightarrow$ BÁZE U SE ZOBRAZÍ NA BÁZI $f(U) \Rightarrow \dim(U) = \dim(f(U))$

VĚTA 11.5 (LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ A JEDNOZNAČNOST VZHLEDEM K OBRAZŮM BÁZE):
JSOU-LI U, V VEKTOROVÉ PROSTORY NAD $\mathbb{T}$ A $x_1, \dots, x_n$ JE BÁZE U,
PAK PRO LIBOVOLNÉ VEKTORY $y_1, \dots, y_m \in V$ EXISTUJE PRÁVĚ JEDNO LINEÁRNÍ
ZOBRAZENÍ f TAKOVÉ, ŽE $f(x_i) = y_i$ PRO $i = 1, \dots, m$.

- DŮKAZ:
EXISTENCE: BUĎ $x \in U$. PAK EXISTUJÍ $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{T}$ TAKOVÉ, ŽE
$x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i$.
DEFINUJME $f(x)$ JAKO $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i$, PROTOŽE LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ
MÁ SPLŇOVAT $f(x) = f\left(\sum \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i$
- LINEARITA f SE PAK OVĚŘÍ SNADNO

JEDNOZNAČNOST:

MĚJME LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ $f, g : U \to V$ TAKOVÉ, ŽE

$f(x_i) = g(x_i) = y_i$ PRO $i = 1, \dots, n$

- JE-LI $x \in U$, PAK $\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in T$ TAKOVÉ, ŽE $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$
- POTOM $f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g(x_i) =$

$$= g\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) = g(x)$$

$\Rightarrow f(x) = g(x)$ PRO $\forall\, x \in U \Rightarrow \underline{\underline{f = g}}$

$\boxtimes$