SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC:

- OBECNÝ TVAR

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

- a_{ij}, b_i = KOEFICIENTY
- x_j = PROMĚNNÉ
- ŘEŠENÍ = VOLBA $x_1, \dots, x_n$ VYHOVUJÍCÍ VŠEM ROVNICÍM

- NAPŘÍKLAD

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 39 \\ 2x + 3y + z &= 34 \\ x + 2y + 3z &= 26 \end{aligned}$$

- SOUSTAVU LZE ZAPSAT MATICOVĚ
- REÁLNÁ **MATICE** TYPU $m \times n$ JE TABULKA REÁLNÝCH ČÍSEL $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$
  - a_{ij} (NEBO A_{ij}) = PRVEK NA POZICI (i, j) — i ŘÁDEK, j SLOUPEC
  - $\mathbb{R}^{m \times n}$ = MNOŽINA VŠECH REÁLNÝCH MATIC $m \times n$
  - MATICE JE **ČTVERCOVÁ**, POKUD $m = n$
  - **VEKTOR** JE MATICÍ TYPU $n \times 1$ (UVAŽUJEME TEDY SLOUPCOVÉ VEKTORY) NAPŘÍKLAD $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
  - **ŘÁDKOVÝ VEKTOR** JE MATICÍ TYPU $1 \times n$ (NAPŘÍKLAD $x = (x_1, \dots, x_n)$)
  - PÍŠEME $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n \times 1}$

- **$*$-NOTACE**:
  - A_{i*} = i-TÝ ŘÁDEK MATICE A = $(A_{i1}, \dots, A_{in})$
  - A_{*j} = j-TÝ SLOUPEC MATICE A = $\begin{pmatrix} A_{1j} \\ \vdots \\ A_{mj} \end{pmatrix}$
  - TEDY $A = \begin{pmatrix} \text{—} \; A_{1*} \; \text{—} \\ \vdots \\ \text{—} \; A_{m*} \; \text{—} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ A_{*1} & \cdots & A_{*n} \\ | & & | \end{pmatrix}$

- **MATICE SOUSTAVY** = $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \vdots & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

ČÁRA ODPOVÍDÁ ROVNOSTEM

- **ROZŠÍŘENÁ MATICE SOUSTAVY** = $\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$

- PŘÍKLAD:
  - ROZŠÍŘENÁ MATICE SOUSTAVY Z ÚVODNÍHO PŘÍKLADU JE $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 2 & 3 & 1 & 34 \\ 1 & 2 & 3 & 26 \end{array}\right)$

- **GEOMETRICKÝ VÝZNAM** SOUSTAV ROVNIC = PRŮNIKY PŘÍMEK, ROVIN, …, NADROVIN

– ZAJÍMAJÍ NÁS ÚPRAVY SOUSTAV, KTERÉ NEMĚNÍ MNOŽINU ŘEŠENÍ

– **ELEMENTÁRNÍ ŘÁDKOVÉ ÚPRAVY**:

1) VYNÁSOBENÍ i-TÉHO ŘÁDKU REÁLNÝM ČÍSLEM $\alpha \neq 0$
2) PŘIČTENÍ α-NÁSOBKU j-TÉHO ŘÁDKU K i-TÉMU, KDE $i \neq j$ A $\alpha \in \mathbb{R}$
3) VÝMĚNA i-TÉHO A j-TÉHO ŘÁDKU

– U 2) STAČÍ UVAŽOVAT $\alpha = 1$, 3) LZE ODSIMULOVAT POMOCÍ 1) A 2)

– **TVRZENÍ 1.1**: ELEMENTÁRNÍ ŘÁDKOVÉ ÚPRAVY NEMĚNÍ MNOŽINU ŘEŠENÍ SOUSTAVY

– MYŠLENKA DŮKAZU:
  – ŘEŠENÍ NEZTRATÍME (X JE ŘEŠENÍ → JE ŘEŠENÍM I PO ÚPRAVĚ)
  – ŘEŠENÍ NEVYTVOŘÍME (ZE SYMETRIE – KAŽDÁ ÚPRAVA MÁ SVŮJ INVERZ)

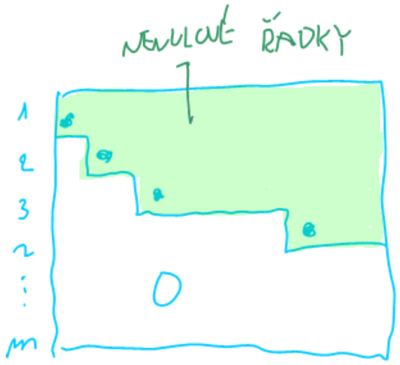
☒

– **GAUSSOVA ELIMINACE**:

– METODA, JAK ŘEŠIT SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

– MYŠLENKA:
TRANSFORMOVAT ROZŠÍŘENOU MATICI SOUSTAVY ELEMENTÁRNÍMI ÚPRAVAMI NA JEDNODUŠŠÍ MATICI, ZE KTERÉ ŘEŠENÍ SNADNO VYPOČTEME

↳ **ODSTUPŇOVANÝ TVAR MATICE**, ZKRÁCENĚ **REF** (ROW ECHELON FORM)



– MATICE $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ JE V REF, POKUD EXISTUJE r TAKOVÉ, ŽE

a) ŘÁDKY $1, \dots, r$ JSOU NENULOVÉ,

b) ŘÁDKY $r+1, \dots, m$ JSOU NULOVÉ

c) POZICE $p_i = \min\{j : a_{ij} \neq 0\}$ PRVNÍHO NENULOVÉHO PRVKU V i-TÉM ŘÁDKU SPLŇUJÍ $p_1 < p_2 < \dots < p_r$

– **PIVOTY** = POZICE $(1, p_1), \dots, (r, p_r)$

– **HODNOST MATICE** = POČET NENULOVÝCH ŘÁDKŮ PO PŘEVODU DO ODSTUPŇOVANÉHO TVARU

– PRO MATICI A ZNAČÍME $\mathrm{RANK}(A)$

= POČET PIVOTŮ = ČÍSLO r

– POZDĚJI UVIDÍME, ŽE POJEM HODNOSTI JE DEFINOVÁN KOREKTNĚ

– SLOUPCE $p_1, \dots, p_r$ JSOU **BÁZICKÉ**, OSTATNÍ **NEBÁZICKÉ**

- KAŽDOU MATICI LZE PŘEVÉST DO REF ELEMENTÁRNÍMI ŘÁDKOVÝMI ÚPRAVAMI

- **ALGORITMUS REF(A):**
  - VSTUP: MATICE $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
  1) $i := 1, j := 1$
  2) IF $a_{kl} = 0$ PRO VŠECHNA $k \geq i$ A $l \geq j$ THEN KONEC
  3) $j := \min\{l : l \geq j, a_{kl} \neq 0$ PRO NĚJAKÉ $k \geq i\}$ PŘESKOČÍME NULOVÉ PODSLOUPEČKY
  4) URČI k TAKOVÉ, ŽE $a_{kj} \neq 0$ PRO $k \geq i$ A VYMĚŇ ŘÁDKY A_{i*} A A_{k*}
     POTÉ JE NA POZICI PIVOTA HODNOTA $a_{ij} \neq 0$
  5) PRO VŠECHNA $k > i$ POLOŽ $A_{k*} := A_{k*} - \frac{a_{kj}}{a_{ij}} A_{i*}$
     ELEMENTÁRNÍ ÚPRAVA 2)
     POUŽÍVÁME $a_{ij} \neq 0$
  6) $i := i+1, j := j+1$ A JDI NA KROK 2)

- V KROKU 4) LZE k ZVOLIT LIBOVOLNĚ
  PARCIÁLNÍ PIVOTIZACE = ZVOL k TAK, ABY $|a_{kj}|$ BYLO CO NEJVĚTŠÍ
- DŮKAZ SPRÁVNOSTI INDUKCÍ
  V KROKU 5) VYNULUJEME VŠECHNY PRVKY POD PIVOTEM (i,j), PROTOŽE PRO KAŽDÉ $k > i$ BUDE NA POZICI (k,j) HODNOTA $a_{kj} - \frac{a_{kj}}{a_{ij}} a_{ij} = 0$
- NEJVÝŠE $\min(m,n)$ ITERACÍ

- NYNÍ MŮŽEME DOKONČIT GAUSSOVU ELIMINACI
- **ALGORITMUS GAUSSOVY ELIMINACE**
  - VSTUP: SOUSTAVA $(A|b)$, KDE $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$
  1) POMOCÍ **REF(A|b)** PŘEVEDEME $(A|b)$ NA ODSTUPŇOVANÝ TVAR $(A'|b')$
     PODLE **TVRZENÍ 1.1** NEMĚNÍME MNOŽINU ŘEŠENÍ
  2) OZNAČME $r = \text{RANK}(A'|b')$ A UVAŽME NÁSLEDUJÍCÍ 3 SITUACE

     A) SOUSTAVA NEMÁ ŘEŠENÍ
     - NASTANE, POKUD $\text{RANK}(A) < \text{RANK}(A|b)$
       NEBOLI JE-LI POSLEDNÍ SLOUPEC MATICE $(A'|b')$ BÁZICKÝ
     - DŮKAZ:
       - r-TÝ ŘÁDEK $(A'|b')$ MÁ TVAR $0x_1 + \dots + 0 \cdot x_n = b'_r$
       - ALE $b'_r \neq 0$, PROTOŽE JE NA POZICI PIVOTA $(r, n+1)$

B) SOUSTAVA MÁ ALESPOŇ JEDNU ŘEŠENÍ

- NASTANE, POKUD $\text{RANK}(A) = \text{RANK}(A|b)$
  NEBOLI JE-LI POSLEDNÍ SLOUPEC MATICE $(A|b)$ NEBÁZICKÝ
- ROZLIŠÍME 2 PODPŘÍPADY

B1) SOUSTAVA MÁ PRÁVĚ JEDNO ŘEŠENÍ

- NASTANE, POKUD $r = m$
  NEBOLI POKUD JE POČET PIVOTŮ ROVNÝ POČTU PROMĚNNÝCH
- ŘEŠENÍ NYNÍ NAJDEME ZPĚTNOU SUBSTITUCÍ = V POŘADÍ $k = m, m-1, \dots, 1$ DOSADÍME $x_k := \dfrac{b'_k - \sum_{j=k+1}^{m} a'_{kj} x_j}{a'_{kk}}$
- DŮKAZ:

$$(A'|b') = \left(\begin{array}{ccc|c} a'_{11} & \cdots & a'_{1m} & b'_1 \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & a'_{mm} & b'_m \\ & 0 & & 0 \\ & & & \vdots \\ & & & 0 \end{array}\right), \text{ TAKŽE}$$

$$\begin{aligned} a'_{11}x_1 + \dots + a'_{1\,m-1}x_{m-1} + a'_{1m}x_m &= b'_1 \\ &\vdots \\ a'_{m-1,m-1}x_{m-1} + a'_{m-1\,m}x_m &= b'_{m-1} \\ a'_{m,m}x_m &= b'_m \end{aligned}$$

DOSADIT x_1
DOSADIT x_{m-1}
⋮
DOSADIT x_m

$\boxtimes$

B2) SOUSTAVA MÁ NEKONEČNĚ MNOHO ŘEŠENÍ

- NASTANE, POKUD $r < m$
  NEBOLI EXISTUJÍ ASPOŇ 2 NEBÁZICKÉ SLOUPCE
- MNOŽINU VŠECH ŘEŠENÍ POPÍŠEME PARAMETRICKY
- BÁZICKÉ PROMĚNNÉ $= x_{p_1}, \dots, x_{p_r}$
- NEBÁZICKÉ PROMĚNNÉ = TY ZBÝVAJÍCÍ
  - BUDOU TVOŘIT PARAMETRY NABÝVAJÍCÍ LIBOVOLNÝCH REÁLNÝCH HODNOT
- V POŘADÍ $k = r, r-1, \dots, 1$ DOSADÍME $x_{p_k} := \dfrac{b'_k - \sum_{j=p_k+1}^{m} a'_{kj} x_j}{a'_{k p_k}}$

- $m - r > 0$ OZNAČUJE DIMENZI ŘEŠENÍ

- $\text{RANK}(A|b)$ = POČET „VÝZNAMNÝCH" ROVNIC V SOUSTAVĚ, OSTATNÍ JSOU POUZE JEJICH KOMBINACÍ

- **VÝPOČETNÍ SLOŽITOST GAUSSOVY SOUSTAVY:**
  - „RYCHLOST ALGORITMU"
  - ALGORITMUS REF (A) POUŽIJE $\frac{2}{3}n^3$ OPERACÍ SČÍTÁNÍ/ODČÍTÁNÍ A NÁSOBENÍ/DĚLENÍ
  - ASYMPTOTICKÁ SLOŽITOST GAUSSOVY ELIMINACE JE STEJNÁ (ZPĚTNÁ SUBSTITUCE POUŽÍVÁ POUZE KVADRATICKY MNOHO KROKŮ)