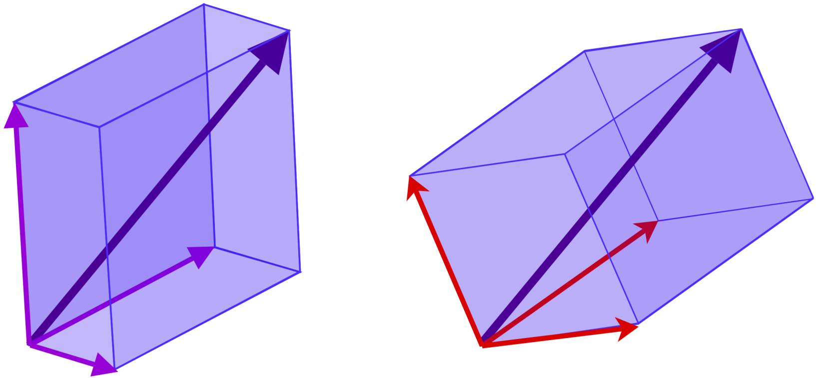
Lineární algebra 1

Martin Balko

9. přednáška

30. listopadu 2021

Báze



Zdroj: https://en.wikipedia.org

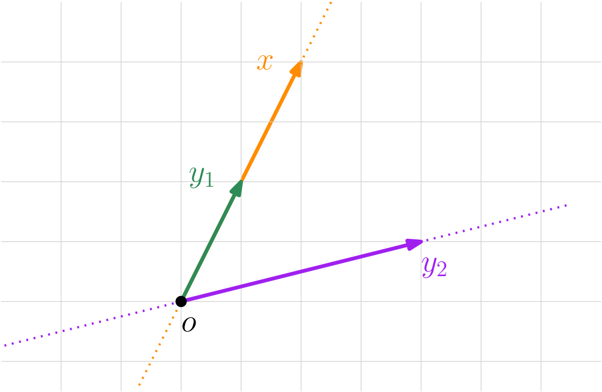
Příklad výměny

Příklad výměny

- V prostoru $\mathbb{R}^2$ uvažme generátory $y_1 = (1, 2)^\top$ a $y_2 = (4, 1)^\top$.

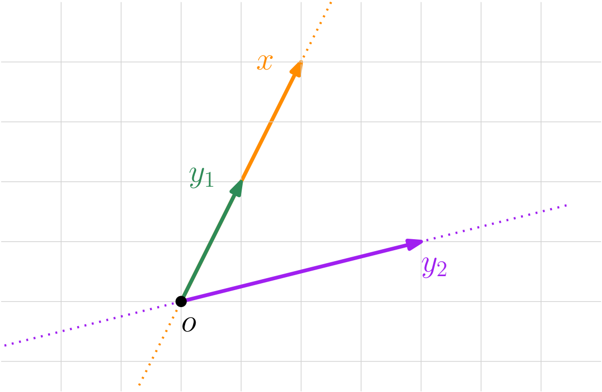
Příklad výměny

- V prostoru $\mathbb{R}^2$ uvažme generátory $y_1 = (1,2)^\top$ a $y_2 = (4,1)^\top$.
- Potom vektor $x = (2,4)^\top$ lze vyjádřit jako $x = 2y_1 + 0y_2$.



Příklad výměny

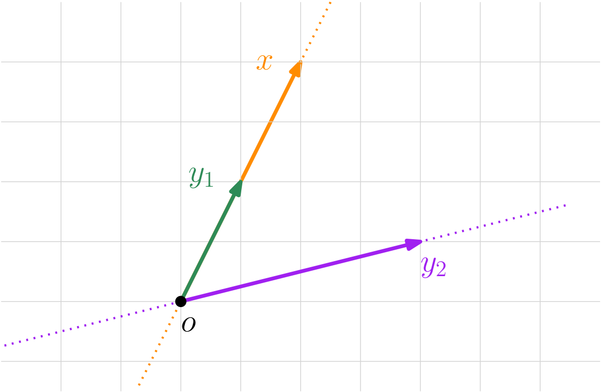
- V prostoru $\mathbb{R}^2$ uvažme generátory $y_1 = (1,2)^\top$ a $y_2 = (4,1)^\top$.
- Potom vektor $x = (2,4)^\top$ lze vyjádřit jako $x = 2y_1 + 0y_2$.



- Vyměníme-li y_1 za x, pak stále platí $\mathrm{span}\{x, y_2\} = \mathbb{R}^2$.

Příklad výměny

- V prostoru $\mathbb{R}^2$ uvažme generátory $y_1 = (1,2)^\top$ a $y_2 = (4,1)^\top$.
- Potom vektor $x = (2,4)^\top$ lze vyjádřit jako $x = 2y_1 + 0y_2$.



- Vyměníme-li y_1 za x, pak stále platí $\mathrm{span}\{x, y_2\} = \mathbb{R}^2$.
- Vyměnit y_2 za x ale nelze, protože pak je $\mathrm{span}\{x, y_1\}$ přímkou $\{(s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2 \colon 2s_1 = s_2\} \subset \mathbb{R}^2$.

Steinitzova věta o výměně

Steinitzova věta o výměně

Věta (Steinitzova věta o výměně)

Nechť V je vektorový prostor, $x_1, \ldots, x_m$ je lineárně nezávislý systém ve V a nechť $y_1, \ldots, y_n$ je systém generátorů prostoru V. Pak platí

1. $m \leq n$,
2. existují navzájem různé indexy $k_1, \ldots, k_{n-m}$ takové, že vektory $x_1, \ldots, x_m, y_{k_1}, \ldots, y_{k_{n-m}}$ tvoří systém generátorů prostoru V.

Steinitzova věta o výměně

Věta (Steinitzova věta o výměně)

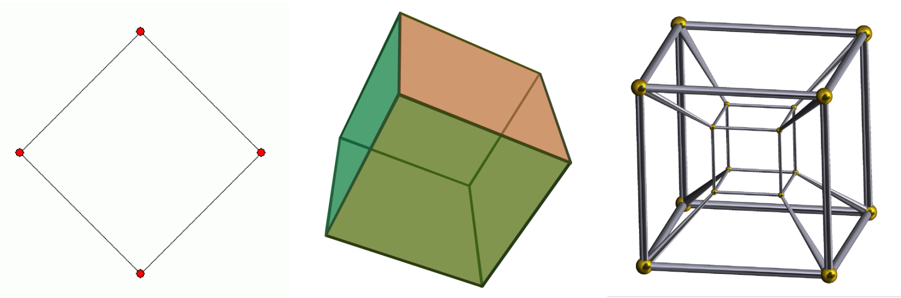
Nechť V je vektorový prostor, $x_1, \dots, x_m$ je lineárně nezávislý systém ve V a nechť $y_1, \dots, y_n$ je systém generátorů prostoru V. Pak platí

1. $m \leq n$,
2. existují navzájem různé indexy $k_1, \dots, k_{n-m}$ takové, že vektory $x_1, \dots, x_m, y_{k_1}, \dots, y_{k_{n-m}}$ tvoří systém generátorů prostoru V.

Obrázek: Ernst Steinitz (1871–1928).

Zdroj: https://family.steinitz.net

Dimenze



Zdroj: https://en.wikipedia.org

Dimenze

Dimenze

- Příklady dimenzí:

Dimenze

- Příklady dimenzí:
    - $\dim \mathbb{R}^{n} = n$,

Dimenze

- Příklady dimenzí:
  - $\dim \mathbb{R}^n = n$,
  - $\dim \mathbb{R}^{m \times n} = mn$,

Dimenze

- Příklady dimenzí:
  - $\dim \mathbb{R}^n = n$,
  - $\dim \mathbb{R}^{m \times n} = mn$,
  - $\dim \{o\} = 0$,

Dimenze

- Příklady dimenzí:
  - $\dim \mathbb{R}^n = n$,
  - $\dim \mathbb{R}^{m \times n} = mn$,
  - $\dim \{o\} = 0$,
  - $\dim \mathcal{P}^n = n + 1$,

Dimenze

- Příklady dimenzí:
  - $\dim \mathbb{R}^n = n$,
  - $\dim \mathbb{R}^{m\times n} = mn$,
  - $\dim \{o\} = 0$,
  - $\dim \mathcal{P}^n = n + 1$,
  - vektorové prostory $\mathcal{P}$, $\mathcal{F}$ a $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$ nejsou konečně generované a mají dimenzi ∞.

Struktura podprostorů

Struktura podprostorů

- Hasseův diagram podprostorů prostoru V s $\dim V = n$ uspořádaný inkluzí bude mít $n + 1$ hladin.

Struktura podprostorů

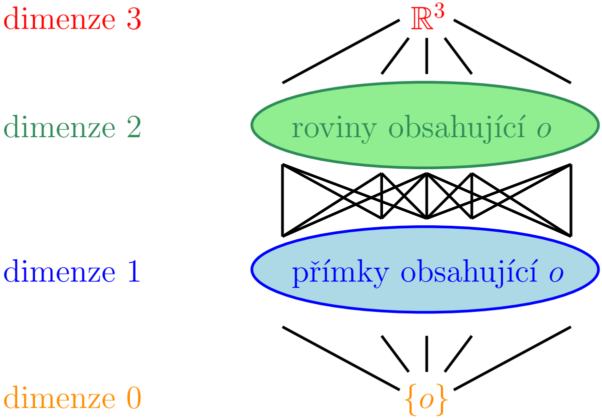
- Hasseův diagram podprostorů prostoru V s $\dim V = n$ uspořádaný inkluzí bude mít $n+1$ hladin. Pro $i \in \{0, \ldots, n\}$ je i-tá hladina je tvořená neporovnatelnými podprostory dimenze i.

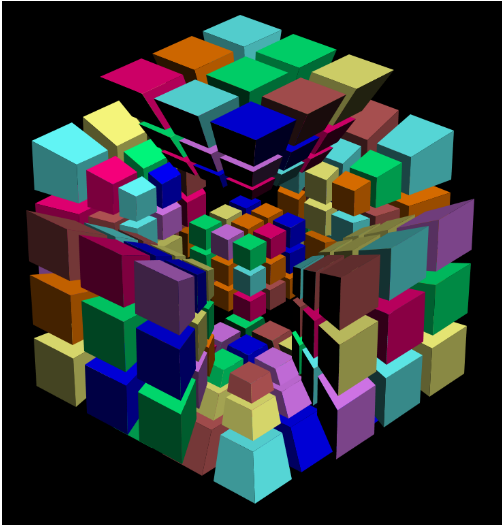
Struktura podprostorů

- Hasseův diagram podprostorů prostoru V s $\dim V = n$ uspořádaný inkluzí bude mít $n+1$ hladin. Pro $i \in \{0, \ldots, n\}$ je i-tá hladina je tvořená neporovnatelnými podprostory dimenze i. Největším prvkem je V a nejmenším je $\{o\}$.

Struktura podprostorů

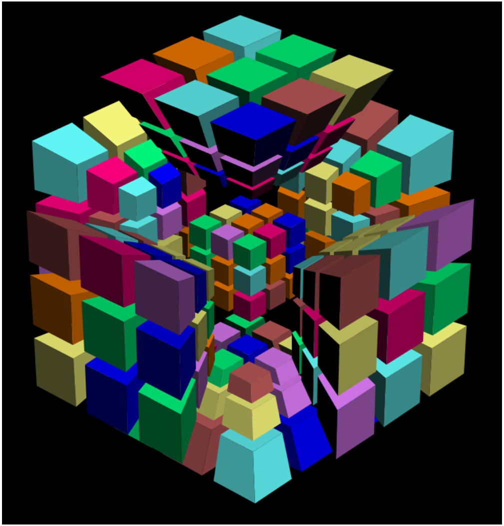
- Hasseův diagram podprostorů prostoru V s $\dim V = n$ uspořádaný inkluzí bude mít $n+1$ hladin. Pro $i \in \{0, \ldots, n\}$ je i-tá hladina je tvořená neporovnatelnými podprostory dimenze i. Největším prvkem je V a nejmenším je $\{o\}$.
- Hasseův diagram podprostorů $\mathbb{R}^3$:





Obrázek: 4-rozměrná Rubikova kostka:
https://www.youtube.com/watch?v=0AqMb-edXlc&ab_channel=KinseyFavre

Zdroj: https://en.wikipedia.org



Obrázek: 4-rozměrná Rubikova kostka:
https://www.youtube.com/watch?v=0AqMb-edXlc&ab_channel=KinseyFavre

Zdroj: https://en.wikipedia.org

Děkuji za pozornost.