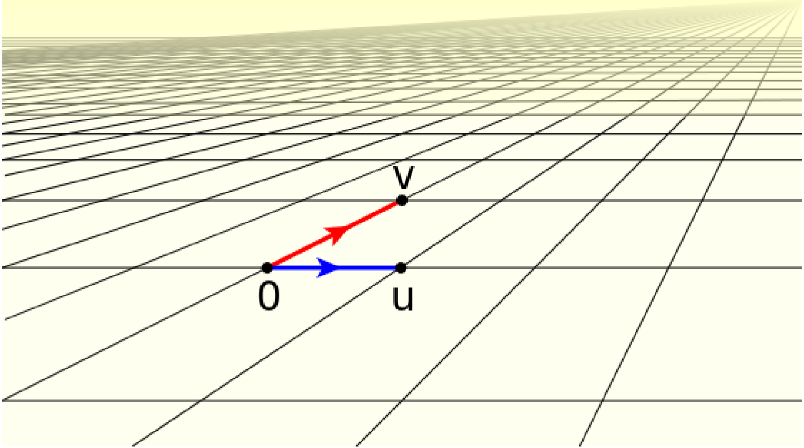
Lineární algebra 1

Martin Balko

7. přednáška

16. listopadu 2021

Podprostory a lineární kombinace



Zdroj: https://wikiwand.com

Vektorové prostory

Vektorové prostory

- Buď $\mathbb{T}$ těleso s neutrálními prvky 0 a 1 pro sčítání a násobení. Vektorový prostor nad $\mathbb{T}$ je množina V s operacemi sčítání vektorů $+\colon V^2 \to V$ a násobení vektoru skalárem $\cdot\colon \mathbb{T} \times V \to V$ splňující pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{T}$ a $u, v \in V$:
  1. $(V, +)$ je Abelova grupa (neutrální prvek o, inverzním k u je $-u$),
  2. $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$, (asociativita)
  3. $1v = v$,
  4. $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$, (distributivita)
  5. $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$. (distributivita)

Příklady vektorových podprostorů

Příklady vektorových podprostorů

1. Triviální podprostory vektorového prostoru V jsou V a $\{o\}$.

Příklady vektorových podprostorů

1. Triviální podprostory vektorového prostoru V jsou V a $\{o\}$.
2. Každá přímka procházející počátkem je podporostorem $\mathbb{R}^2$.

Příklady vektorových podprostorů

1. Triviální podprostory vektorového prostoru V jsou V a $\{o\}$.
2. Každá přímka procházející počátkem je podporostorem $\mathbb{R}^2$.
3. $\mathcal{P}^n \Subset \mathcal{P} \Subset \mathcal{C} \Subset \mathcal{F}$.

Příklady vektorových podprostorů

1. Triviální podprostory vektorového prostoru V jsou V a $\{o\}$.
2. Každá přímka procházející počátkem je podporostorem $\mathbb{R}^2$.
3. $\mathcal{P}^n \Subset \mathcal{P} \Subset \mathcal{C} \Subset \mathcal{F}$.
4. Množina symetrických reálných matic řádu n je podprostorem $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Příklady vektorových podprostorů

1. Triviální podprostory vektorového prostoru V jsou V a $\{o\}$.
2. Každá přímka procházející počátkem je podporostorem $\mathbb{R}^2$.
3. $\mathcal{P}^n \Subset \mathcal{P} \Subset \mathcal{C} \Subset \mathcal{F}$.
4. Množina symetrických reálných matic řádu n je podprostorem $\mathbb{R}^{n\times n}$.
5. Množina $\mathbb{Q}^n$ nad $\mathbb{Q}$ je podprostorem $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{Q}$

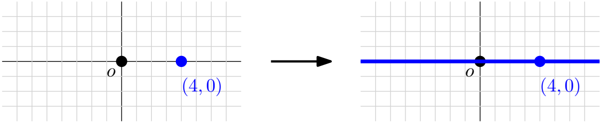
Příklady vektorových podprostorů

1. Triviální podprostory vektorového prostoru V jsou V a $\{o\}$.
2. Každá přímka procházející počátkem je podporostorem $\mathbb{R}^2$.
3. $\mathcal{P}^n \Subset \mathcal{P} \Subset \mathcal{C} \Subset \mathcal{F}$.
4. Množina symetrických reálných matic řádu n je podprostorem $\mathbb{R}^{n \times n}$.
5. Množina $\mathbb{Q}^n$ nad $\mathbb{Q}$ je podprostorem $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{Q}$, ale není podprostorem $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$ (pracuje nad jiným tělesem).

Příklady lineárních obalů v $\mathbb{R}^2$

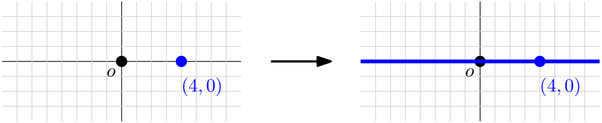
Příklady lineárních obalů v $\mathbb{R}^2$

1. $\operatorname{span}\{(4,0)^\top\}$ je přímka, konkrétně osa x_1.

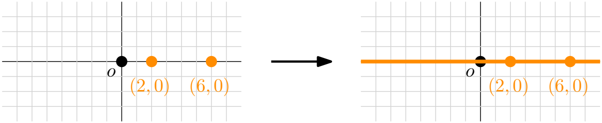


Příklady lineárních obalů v $\mathbb{R}^2$

1. $\mathrm{span}\{(4,0)^\top\}$ je přímka, konkrétně osa x_1.

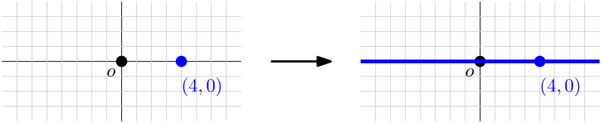


2. $\mathrm{span}\{(2,0)^\top, (6,0)^\top\}$ je přímka, konkrétně osa x_1.

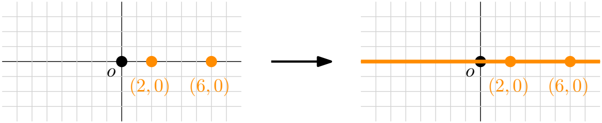


Příklady lineárních obalů v $\mathbb{R}^2$

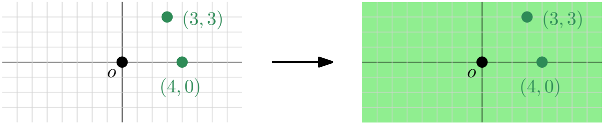
1. $\operatorname{span}\{(4,0)^\top\}$ je přímka, konkrétně osa x_1.



2. $\operatorname{span}\{(2,0)^\top, (6,0)^\top\}$ je přímka, konkrétně osa x_1.

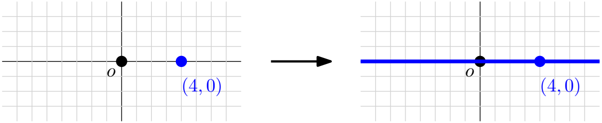


3. $\operatorname{span}\{(4,0)^\top, (3,3)^\top\}$ je celá rovina.

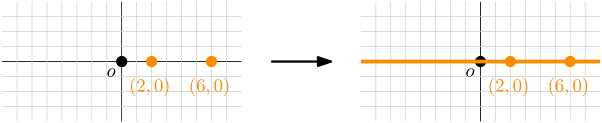


Příklady lineárních obalů v $\mathbb{R}^2$

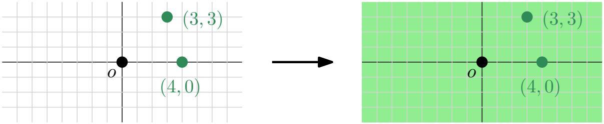
1. $\operatorname{span}\{(4,0)^\top\}$ je přímka, konkrétně osa x_1.



2. $\operatorname{span}\{(2,0)^\top, (6,0)^\top\}$ je přímka, konkrétně osa x_1.



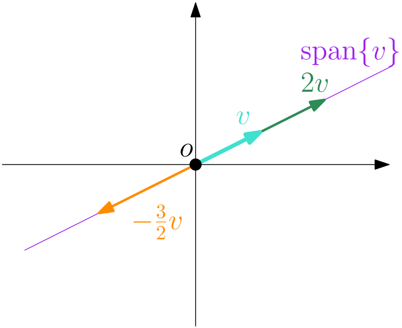
3. $\operatorname{span}\{(4,0)^\top, (3,3)^\top\}$ je celá rovina.

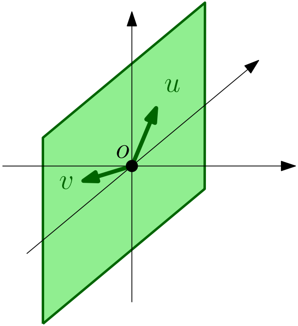


4. $\operatorname{span}\{\} = \{o\}$.

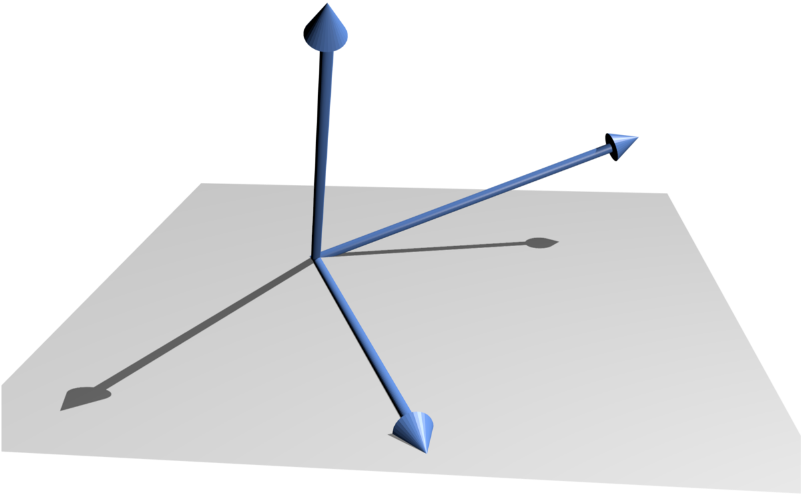
Příklady lineárních obalů v $\mathbb{R}^3$

Příklady lineárních obalů v $\mathbb{R}^3$





Lineární nezávislost



Zdroj: https://en.wikipedia.org

Lineární (ne)závislost: příklady

Lineární (ne)závislost: příklady

- $(1, 0)^\top$ je lineárně nezávislý,

Lineární (ne)závislost: příklady

- $(1, 0)^\top$ je lineárně nezávislý,
- $(1, 0)^\top, (2, 0)^\top$ jsou lineárně závislé,

Lineární (ne)závislost: příklady

- $(1, 0)^\top$ je lineárně nezávislý,
- $(1, 0)^\top, (2, 0)^\top$ jsou lineárně závislé,
- $(1, 1)^\top, (1, 2)^\top$ jsou lineárně nezávislé,

Lineární (ne)závislost: příklady

- $(1,0)^\top$ je lineárně nezávislý,
- $(1,0)^\top, (2,0)^\top$ jsou lineárně závislé,
- $(1,1)^\top, (1,2)^\top$ jsou lineárně nezávislé,
- $(1,0)^\top, (0,1)^\top, (1,1)^\top$ jsou lineárně závislé,

Lineární (ne)závislost: příklady

- $(1,0)^\top$ je lineárně nezávislý,
- $(1,0)^\top, (2,0)^\top$ jsou lineárně závislé,
- $(1,1)^\top, (1,2)^\top$ jsou lineárně nezávislé,
- $(1,0)^\top, (0,1)^\top, (1,1)^\top$ jsou lineárně závislé,
- $(0,0)^\top$ je lineárně závislý,

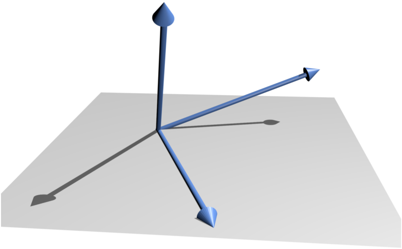
Lineární (ne)závislost: příklady

- $(1, 0)^\top$ je lineárně nezávislý,
- $(1, 0)^\top, (2, 0)^\top$ jsou lineárně závislé,
- $(1, 1)^\top, (1, 2)^\top$ jsou lineárně nezávislé,
- $(1, 0)^\top, (0, 1)^\top, (1, 1)^\top$ jsou lineárně závislé,
- $(0, 0)^\top$ je lineárně závislý,
- prázdná množina je lineárně nezávislá.

Lineární (ne)závislost: příklady

Lineární (ne)závislost: příklady

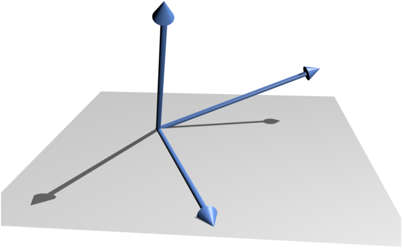
- Příklad tří lineárně nezávislých vektorů v $\mathbb{R}^3$:



Zdroj: https://en.wikipedia.org

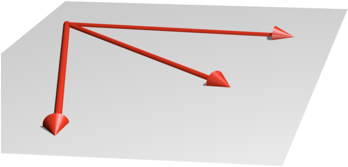
Lineární (ne)závislost: příklady

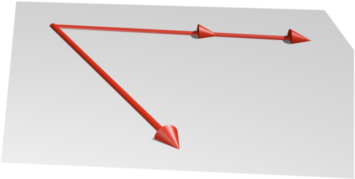
- Příklad tří lineárně nezávislých vektorů v $\mathbb{R}^3$:



Zdroj: https://en.wikipedia.org

- Příklady tří lineárně závislých vektorů v $\mathbb{R}^3$:





Zdroj: https://en.wikipedia.org

Jak zjistit lineární (ne)závislost?

Jak zjistit lineární (ne)závislost?

- Uvažme vektory $(1,3,2)^\top$, $(2,5,3)^\top$ a $(2,3,1)^\top$.

Jak zjistit lineární (ne)závislost?

- Uvažme vektory $(1,3,2)^\top$, $(2,5,3)^\top$ a $(2,3,1)^\top$. Jsou lineárně závislé?

Jak zjistit lineární (ne)závislost?

- Uvažme vektory $(1,3,2)^\top$, $(2,5,3)^\top$ a $(2,3,1)^\top$. Jsou lineárně závislé?
- Z definice nás zajímají skaláry $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Jak zjistit lineární (ne)závislost?

- Uvažme vektory $(1, 3, 2)^\top$, $(2, 5, 3)^\top$ a $(2, 3, 1)^\top$. Jsou lineárně závislé?
- Z definice nás zajímají skaláry $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- To vede na soustavu tří lineárních rovnic s proměnnými α, β, γ:

$$\begin{aligned} 1\alpha + 2\beta + 2\gamma &= 0 \\ 3\alpha + 5\beta + 3\gamma &= 0 \\ 2\alpha + 3\beta + 1\gamma &= 0 \end{aligned}$$

Jak zjistit lineární (ne)závislost?

- Uvažme vektory $(1,3,2)^\top$, $(2,5,3)^\top$ a $(2,3,1)^\top$. Jsou lineárně závislé?
- Z definice nás zajímají skaláry $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- To vede na soustavu tří lineárních rovnic s proměnnými α, β, γ:

$$\begin{aligned} 1\alpha + 2\beta + 2\gamma &= 0 \\ 3\alpha + 5\beta + 3\gamma &= 0 \Rightarrow \\ 2\alpha + 3\beta + 1\gamma &= 0 \end{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Jak zjistit lineární (ne)závislost?

- Uvažme vektory $(1,3,2)^\top$, $(2,5,3)^\top$ a $(2,3,1)^\top$. Jsou lineárně závislé?
- Z definice nás zajímají skaláry $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- To vede na soustavu tří lineárních rovnic s proměnnými α, β, γ:

$$\begin{array}{l} 1\alpha + 2\beta + 2\gamma = 0 \\ 3\alpha + 5\beta + 3\gamma = 0 \\ 2\alpha + 3\beta + 1\gamma = 0 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Jak zjistit lineární (ne)závislost?

- Uvažme vektory $(1,3,2)^\top$, $(2,5,3)^\top$ a $(2,3,1)^\top$. Jsou lineárně závislé?
- Z definice nás zajímají skaláry $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- To vede na soustavu tří lineárních rovnic s proměnnými α, β, γ:

$$\begin{aligned} 1\alpha + 2\beta + 2\gamma &= 0 \\ 3\alpha + 5\beta + 3\gamma &= 0 \\ 2\alpha + 3\beta + 1\gamma &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- Dostáváme například nenulové řešení $\alpha = 4$, $\beta = -3$ a $\gamma = 1$.

Jak zjistit lineární (ne)závislost?

- Uvažme vektory $(1,3,2)^\top$, $(2,5,3)^\top$ a $(2,3,1)^\top$. Jsou lineárně závislé?
- Z definice nás zajímají skaláry $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- To vede na soustavu tří lineárních rovnic s proměnnými α, β, γ:

$$\begin{aligned} 1\alpha + 2\beta + 2\gamma &= 0 \\ 3\alpha + 5\beta + 3\gamma &= 0 \\ 2\alpha + 3\beta + 1\gamma &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- Dostáváme například nenulové řešení $\alpha = 4$, $\beta = -3$ a $\gamma = 1$. Vektory jsou tedy lineárně závislé.

Jak zjistit lineární (ne)závislost?

- Uvažme vektory $(1,3,2)^\top$, $(2,5,3)^\top$ a $(2,3,1)^\top$. Jsou lineárně závislé?
- Z definice nás zajímají skaláry $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ takové, že

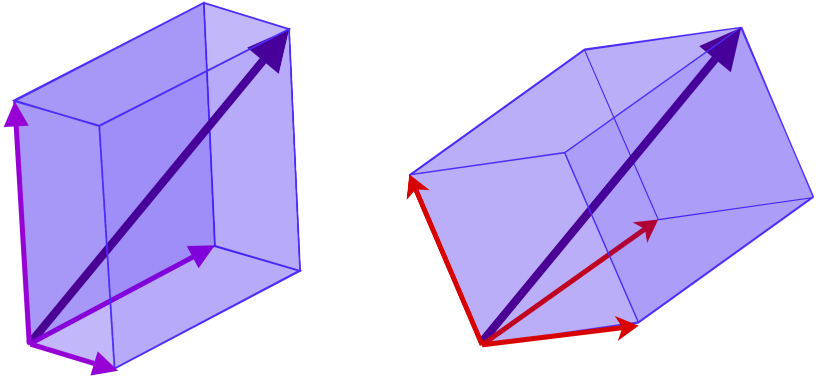
$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- To vede na soustavu tří lineárních rovnic s proměnnými α, β, γ:

$$\begin{aligned} 1\alpha + 2\beta + 2\gamma &= 0 \\ 3\alpha + 5\beta + 3\gamma &= 0 \\ 2\alpha + 3\beta + 1\gamma &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- Dostáváme například nenulové řešení $\alpha = 4$, $\beta = -3$ a $\gamma = 1$. Vektory jsou tedy lineárně závislé.
- Souvislost s maticemi: sloupce (i řádky) regulární matice jsou lineárně nezávislými vektory.

Báze



Zdroj: https://en.wikipedia.org

Příklady bází:

Příklady bází:

- V $\mathbb{R}^2$ je bází třeba $(1, 0)^\top, (0, 1)^\top$

Příklady bází:

- V $\mathbb{R}^2$ je bází třeba $(1,0)^\top, (0,1)^\top$, ale i $(7,5)^\top, (2,3)^\top$,

Příklady bází:

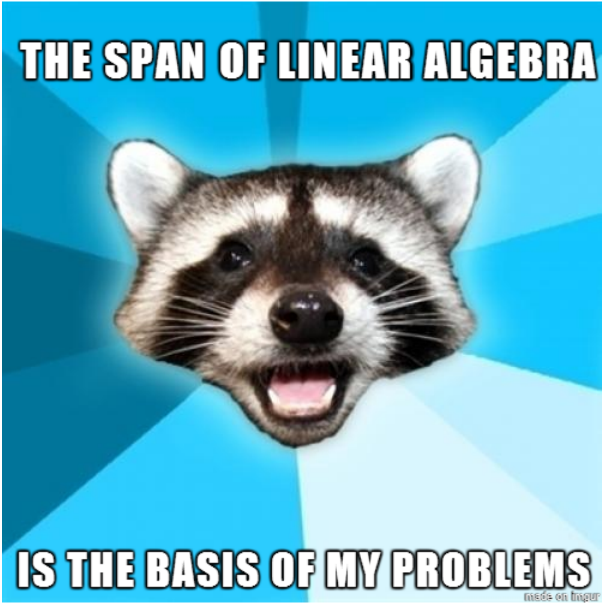
- V $\mathbb{R}^2$ je bází třeba $(1,0)^\top, (0,1)^\top$, ale i $(7,5)^\top, (2,3)^\top$,
- V $\mathbb{R}^n$ lze uvážit kanonickou bázi $\mathrm{kan} = \{e_1, \ldots, e_n\}$, kde e_i má jedničku na pozici i a jinak nuly.

Příklady bází:

- V $\mathbb{R}^2$ je bází třeba $(1,0)^\top, (0,1)^\top$, ale i $(7,5)^\top, (2,3)^\top$,
- V $\mathbb{R}^n$ lze uvážit kanonickou bázi $\mathrm{kan} = \{e_1, \ldots, e_n\}$, kde e_i má jedničku na pozici i a jinak nuly.
- V prostoru polynomů $\mathcal{P}^n$ max. stupně n je bází $1, x, \ldots, x^n$.

Příklady bází:

- V $\mathbb{R}^2$ je bází třeba $(1,0)^\top, (0,1)^\top$, ale i $(7,5)^\top, (2,3)^\top$,
- V $\mathbb{R}^n$ lze uvážit kanonickou bázi $\mathrm{kan} = \{e_1, \ldots, e_n\}$, kde e_i má jedničku na pozici i a jinak nuly.
- V prostoru polynomů $\mathcal{P}^n$ max. stupně n je bází $1, x, \ldots, x^n$.
- V prostoru polynomů $\mathcal{P}$ je (nekonečnou) bází $1, x, , x^2, \ldots$.



Zdroj: https://imgur.com

Děkuji za pozornost.