

# Lineární algebra 1

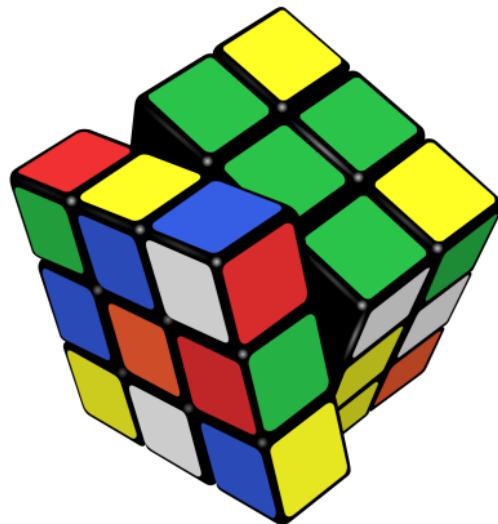
Martin Balko

## 5. přednáška

2. listopadu 2021



# Grupy



Zdroj: <https://wikipedia.org>

# Příklady

# Příklady

- Příklady Abelových grup:

# Příklady

- Příklady Abelových grup:
  - ❶  $(\mathbb{Z}, +)$ ,  $(\mathbb{Q}, +)$ ,  $(\mathbb{R}, +)$ ,  $(\mathbb{C}, +)$ ,

# Příklady

- Příklady Abelových grup:
  - ❶  $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +)$ ,
  - ❷  $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot), (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot), (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ ,

## Příklady

- Příklady Abelových grup:
  - ❶  $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +)$ ,
  - ❷  $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot), (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot), (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ ,
  - ❸ **grupa matic**  $(\mathbb{R}^{m \times n}, +)$ , kde neutrálním prvkem je nulová matice  $m \times n$  a inverzním prvkem k matici  $A$  je matice  $-A$ ,

## Příklady

- Příklady Abelových grup:
  - ❶  $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +)$ ,
  - ❷  $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot), (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot), (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ ,
  - ❸ **grupa matic**  $(\mathbb{R}^{m \times n}, +)$ , kde neutrálním prvkem je nulová matice  $m \times n$  a inverzním prvkem k matici  $A$  je matice  $-A$ ,
  - ❹ **konečná grupa**  $(\mathbb{Z}_m, +)$ , kde  $\mathbb{Z}_m = \{0, 1, \dots, m-1\}$  a sčítání  $+$  se provádí modulo  $m$ . Neutrálním prvkem je 0 a inverzním prvkem k  $a$  je  $-a \bmod m$ .

# Příklady

- Příklady Abelových grup:
  - ❶  $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +)$ ,
  - ❷  $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot), (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot), (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ ,
  - ❸ **grupa matic**  $(\mathbb{R}^{m \times n}, +)$ , kde neutrálním prvkem je nulová matice  $m \times n$  a inverzním prvkem k matici  $A$  je matice  $-A$ ,
  - ❹ **konečná grupa**  $(\mathbb{Z}_m, +)$ , kde  $\mathbb{Z}_m = \{0, 1, \dots, m-1\}$  a sčítání  $+$  se provádí modulo  $m$ . Neutrálním prvkem je 0 a inverzním prvkem k  $a$  je  $-a \bmod m$ .
  - ❺ **grupa**  $(\{p(x) : p \text{ je polynom}\}, +)$  polynomů se sčítáním.

# Příklady

- Příklady Abelových grup:
  - ❶  $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +)$ ,
  - ❷  $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot), (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot), (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ ,
  - ❸ **grupa matic**  $(\mathbb{R}^{m \times n}, +)$ , kde neutrálním prvkem je nulová matice  $m \times n$  a inverzním prvkem k matici  $A$  je matice  $-A$ ,
  - ❹ **konečná grupa**  $(\mathbb{Z}_m, +)$ , kde  $\mathbb{Z}_m = \{0, 1, \dots, m-1\}$  a sčítání  $+$  se provádí modulo  $m$ . Neutrálním prvkem je 0 a inverzním prvkem k  $a$  je  $-a \bmod m$ .
  - ❺ **grupa**  $(\{p(x) : p \text{ je polynom}\}, +)$  polynomů se sčítáním.
- Příklady ne nutně Abelových grup:

# Příklady

- Příklady Abelových grup:
  - ❶  $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +)$ ,
  - ❷  $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot), (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot), (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ ,
  - ❸ **grupa matic**  $(\mathbb{R}^{m \times n}, +)$ , kde neutrálním prvkem je nulová matice  $m \times n$  a inverzním prvkem k matici  $A$  je matice  $-A$ ,
  - ❹ **konečná grupa**  $(\mathbb{Z}_m, +)$ , kde  $\mathbb{Z}_m = \{0, 1, \dots, m-1\}$  a sčítání  $+$  se provádí modulo  $m$ . Neutrálním prvkem je 0 a inverzním prvkem k  $a$  je  $-a \bmod m$ .
  - ❺ grupa  $(\{p(x) : p \text{ je polynom}\}, +)$  polynomů se sčítáním.
- Příklady ne nutně Abelových grup:
  - ❶ množina všech bijekcí na množině s operací skládání,

# Příklady

- Příklady Abelových grup:
  - ❶  $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +)$ ,
  - ❷  $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot), (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot), (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ ,
  - ❸ **grupa matic**  $(\mathbb{R}^{m \times n}, +)$ , kde neutrálním prvkem je nulová matice  $m \times n$  a inverzním prvkem k matici  $A$  je matice  $-A$ ,
  - ❹ **konečná grupa**  $(\mathbb{Z}_m, +)$ , kde  $\mathbb{Z}_m = \{0, 1, \dots, m-1\}$  a sčítání  $+$  se provádí modulo  $m$ . Neutrálním prvkem je 0 a inverzním prvkem k  $a$  je  $-a \bmod m$ .
  - ❺ **grupa**  $(\{p(x) : p \text{ je polynom}\}, +)$  polynomů se sčítáním.
- Příklady ne nutně Abelových grup:
  - ❶ množina všech bijekcí na množině s operací skládání,
  - ❷ množina regulárních matic řádu  $n$  s násobením.

# Příklady

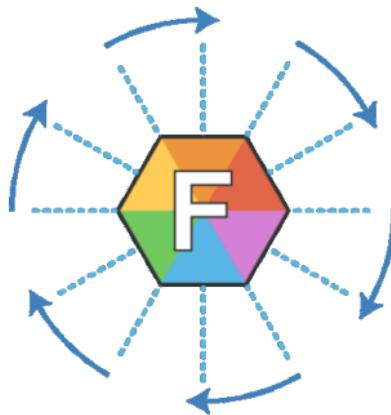
- Příklady Abelových grup:
  - ❶  $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +)$ ,
  - ❷  $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot), (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot), (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ ,
  - ❸ **grupa matic**  $(\mathbb{R}^{m \times n}, +)$ , kde neutrálním prvkem je nulová matice  $m \times n$  a inverzním prvkem k matici  $A$  je matice  $-A$ ,
  - ❹ **konečná grupa**  $(\mathbb{Z}_m, +)$ , kde  $\mathbb{Z}_m = \{0, 1, \dots, m-1\}$  a sčítání  $+$  se provádí modulo  $m$ . Neutrálním prvkem je 0 a inverzním prvkem k  $a$  je  $-a \bmod m$ .
  - ❺ grupa  $(\{p(x) : p \text{ je polynom}\}, +)$  polynomů se sčítáním.
- Příklady ne nutně Abelových grup:
  - ❶ množina všech bijekcí na množině s operací skládání,
  - ❷ množina regulárních matic řádu  $n$  s násobením.
- Příklady negrup:

# Příklady

- Příklady Abelových grup:
  - ❶  $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +)$ ,
  - ❷  $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot), (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot), (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ ,
  - ❸ **grupa matic**  $(\mathbb{R}^{m \times n}, +)$ , kde neutrálním prvkem je nulová matice  $m \times n$  a inverzním prvkem k matici  $A$  je matice  $-A$ ,
  - ❹ **konečná grupa**  $(\mathbb{Z}_m, +)$ , kde  $\mathbb{Z}_m = \{0, 1, \dots, m-1\}$  a sčítání  $+$  se provádí modulo  $m$ . Neutrálním prvkem je 0 a inverzním prvkem k  $a$  je  $-a \bmod m$ .
  - ❺ grupa  $(\{p(x) : p \text{ je polynom}\}, +)$  polynomů se sčítáním.
- Příklady ne nutně Abelových grup:
  - ❶ množina všech bijekcí na množině s operací skládání,
  - ❷ množina regulárních matic řádu  $n$  s násobením.
- Příklady negrup:
  - ❶  $(\mathbb{N}, +), (\mathbb{Z}, -), (\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot), (\mathbb{R} \setminus \{0\}, : )$ .

## Exotičtější příklad grupy

## Exotičtější příklad grupy



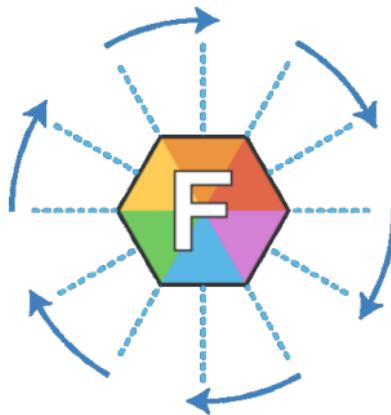
**ROTATIONS**



**REFLECTIONS**

Zdroj: <https://res.cloudinary.com>

## Exotičtější příklad grupy



**ROTATIONS**

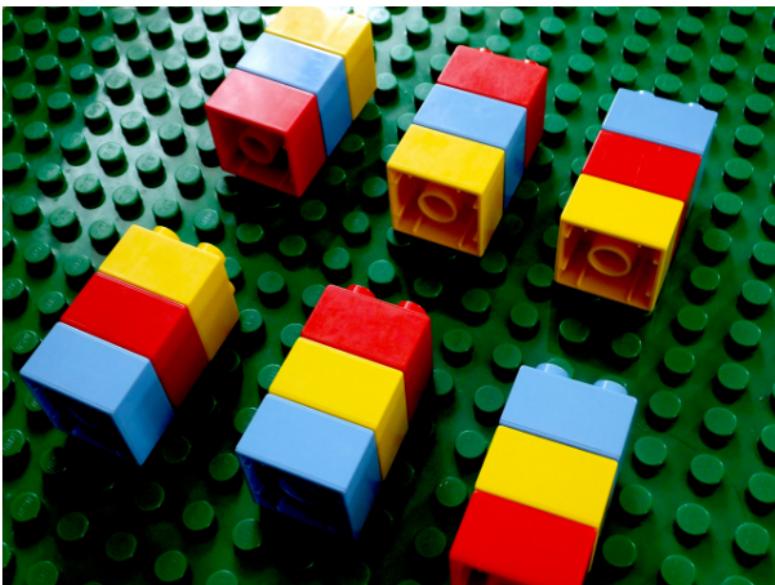


**REFLECTIONS**

Zdroj: <https://res.cloudinary.com>

Grupou symetrií hexagonu je tzv. dihedrální grupa  $D_6$  s 12 prvků.

# Permutace

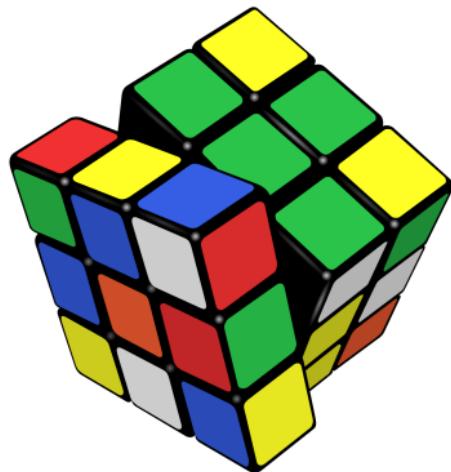
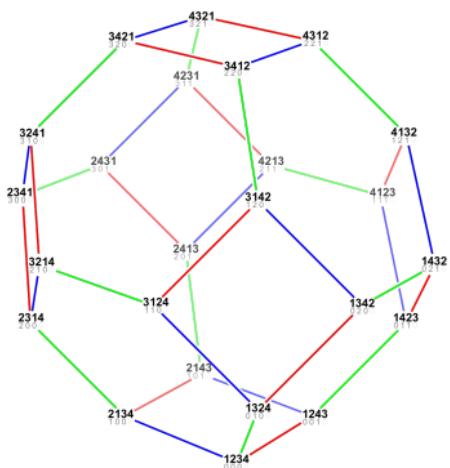


Zdroj: <https://playcuriously.wordpress.com>

# Symetrická grupa

# Symetrická grupa

- Množina permutací  $S_n$  tvoří s operací skládání  $\circ$  takzvanou **symetrickou grupu**  $(S_n, \circ)$ .

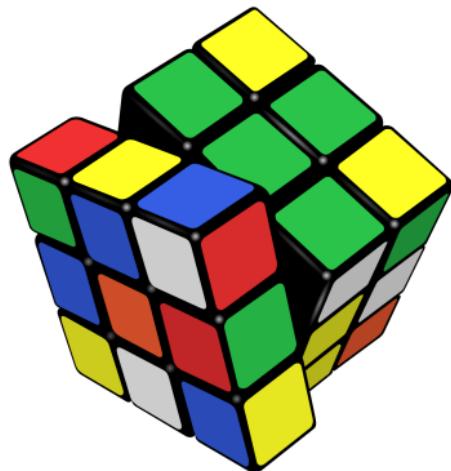
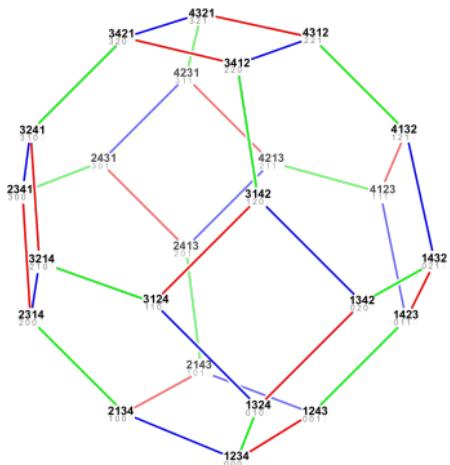


Obrázek: Reprezentace symetrické grupy  $S_4$  a Rubikova kostka.

Zdroj: <https://wikimedia.org>

# Symetrická grupa

- Množina permutací  $S_n$  tvoří s operací skládání  $\circ$  takzvanou **symetrickou grupu**  $(S_n, \circ)$ .



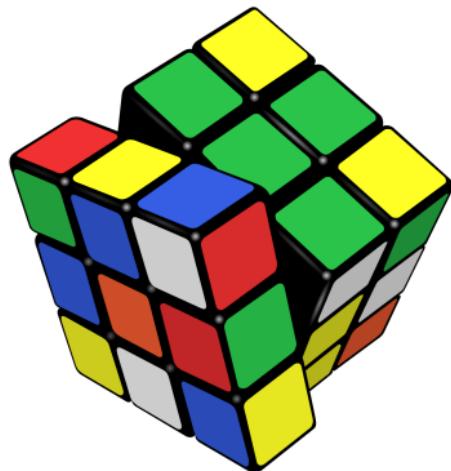
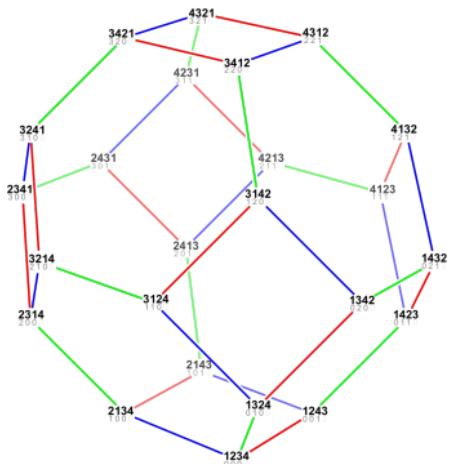
Obrázek: Reprezentace symetrické grupy  $S_4$  a Rubikova kostka.

Zdroj: <https://wikimedia.org>

- Symetrické grupy popisují symetrie různých objektů.

# Symetrická grupa

- Množina permutací  $S_n$  tvoří s operací skládání  $\circ$  takzvanou **symetrickou grupu**  $(S_n, \circ)$ .



Obrázek: Reprezentace symetrické grupy  $S_4$  a Rubikova kostka.

Zdroj: <https://wikimedia.org>

- Symetrické grupy popisují symetrie různých objektů.
- Každá grupa je isomorfní nějaké podgrupě symetrické grupy.



# The Periodic Table Of Finite Simple Groups

$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$	$\mathbf{1}$	Dynkin Diagrams of Simple Lie Algebras												$C_2$		
	$\mathbf{1}$													$\mathbf{2}$		
$A_1(4), A_1(5)$	$A_0(2)$	$A_1(7)$	$D_4$	$E_{6,7,8}$	$F_4$	$G_2$	$^3A_0(4)$	$B_2(3)$	$C_3(3)$	$D_4(2)$	$^2D_4(2^2)$	$^2A_2(9)$	$^2A_2(16)$	$C_3$		
$A_5$														$3$		
$60$		$168$												$C_5$		
$A_6(3), B_0(3^2)$	$I_{G_2(3)}/$	$A_1(8)$	$C_4$	$E_{6,7,8}$				$B_2(4)$	$C_3(5)$	$D_4(3)$	$^2D_4(3^2)$	$^2A_2(16)$		$5$		
														$C_7$		
$A_7$	$A_1(11)$	$E_6(2)$	$E_7(2)$	$E_8(2)$	$F_4(2)$	$G_2(3)$	$^3D_4(2^2)$	$^2E_6(2^2)$	$^2B_2(2^2)$	$^2F_4(2)^2$	$^2G_2(3^2)$	$B_2(2)$	$C_4(3)$	$D_5(2)$	$^2D_5(2^2)$	$^2A_2(25)$
$2320$		$660$	$2144411579452$ $0005772579400$	$2144411579452$ $0005772579400$	$5911324$ $0005772579400$	$4245676$	$213241312$	$7631147400$	$201120$	$17777200$	$104794472$	$14511220$	$45794776$ $0005772579400$	$2349929359400$	$23431379359400$	$120000$
$A_8(2)$	$A_1(13)$	$E_6(3)$	$E_7(3)$	$E_8(3)$	$F_4(3)$	$G_2(4)$	$^3D_4(3^2)$	$^2E_6(3^2)$	$^2B_2(2^2)$	$^2F_4(2)^2$	$^2G_2(3^2)$	$B_2(5)$	$C_3(7)$	$D_4(5)$	$^2D_4(4^2)$	$^2A_3(9)$
$20160$		$1092$	$2144411579452$ $0005772579400$	$2144411579452$ $0005772579400$	$5774430751524$ $07184474000$	$251596480$	$1054051164112$	$344505122400$	$82537400$	$244505122400$	$45425437$	$270457230$	$45794776$ $0005772579400$	$47536472$	$52358930$	
$A_9$	$A_1(17)$	$E_6(4)$	$E_7(4)$	$E_8(4)$	$F_4(4)$	$G_2(5)$	$^3D_4(4^2)$	$^2E_6(4^2)$	$^2B_2(2^2)$	$^2F_4(2^2)$	$^2G_2(3^2)$	$B_2(7)$	$C_3(9)$	$D_5(5)$	$^2D_5(5^2)$	$^2A_2(64)$
$181440$		$2448$	$2144411579452$ $0005772579400$	$2144411579452$ $0005772579400$	$5109900000$	$67362304$	$3410930000$	$2301093000$	$120275600$	$341093000$	$540571402$	$120000000$	$120000000$	$120000000$	$120000000$	$5335776$
$A_{10}$	$E_6(q)$	$E_7(q)$	$E_8(q)$	$F_4(q)$	$G_2(q)$	$^3D_4(q^2)$	$^2E_6(q^2)$	$^1B_2(2q+1)$	$^1F_4(2q+1)$	$^2G_2(3q+1)$	$B_2(q)$	$C_3(q)$	$D_5(q)$	$^2D_5(q^2)$	$^2A_2(q^2)$	
$\frac{q^6}{2}$		$\frac{q^{12}}{2}$	$\frac{q^{18}}{2}$	$\frac{q^8}{2}$	$\frac{q^4}{2}$	$\frac{q^2}{2}$	$\frac{q^2}{2}$	$\frac{q^2}{2}$								
<small>*The groups <math>A_n(q)</math> and <math>E_n(q)</math> are a group of Lie type, but in the context of finite simple groups they are the upper left <math>n \times n</math> entries in the block-diagonal form of the Weyl group. They are not simple groups.</small>																
<small>**Some simple groups and infinite families have names in the upper left or other names by which they are known. These names are listed here. Note that some of these names are not standard, and some are not even widely used. We also include the names of the block-diagonal forms of the Weyl groups, which are not simple groups in the strict sense, but are closely related to <math>A_n(q)</math> and <math>E_n(q)</math>.</small>																
<small>***The groups starting on the second row are the classical groups, while the remaining groups are classified by the number of their classes.</small>																
<small>****Copyright © 2004 from Atlas.</small>																


  
 Alternating Groups  
 Classical General Linear Groups  
 Chevalley Groups  
 Classical Steinberg Groups  
 Steinberg Groups  
 Suzuki Groups  
 Ree Groups and Tits Group\*  
 Sporadic Groups  
 Cyclic Groups

\*The groups  $A_n(q)$  and  $E_n(q)$  are a group of Lie type, but in the context of finite simple groups they are the upper left  $n \times n$  entries in the block-diagonal form of the Weyl group. They are not simple groups in the strict sense.

\*\*Some simple groups and infinite families have names in the upper left or other names by which they are known. These names are listed here. Note that some of these names are not standard, and some are not even widely used. We also include the names of the block-diagonal forms of the Weyl groups, which are not simple groups in the strict sense, but are closely related to  $A_n(q)$  and  $E_n(q)$ .

\*\*\*The groups starting on the second row are the classical groups, while the remaining groups are classified by the number of their classes.

\*\*\*\*Copyright © 2004 from Atlas.

$M_{11}$	$M_{12}$	$M_{22}$	$M_{23}$	$M_{24}$	$(O(10), O(10))$	$H_1$	$H_2$	$H_3$	$I_1$	$HS$	$McL$	$He$	$Ru$	
$7920$	$95040$	$445520$	$101000960$	$2448293040$	$175560$	$604800$	$5032960$	$507796200$	$44352000$	$998128000$	$443007300$	$3459100000$	$443007300$	$3459100000$

$Suz$	$O'N, Os-6$	$-3$	$-2$	$-1$	$Co_1$	$HN$	$Ly$	$Re, E$	$Tb$	$M(22)$	$M(23)$	$G_{2+M}(24)^*$	$I_2$	$B$	$I_{\alpha}, M$
$445345497600$	$446913509320$	$495760476400$	$42309421732000$	$5433000000$	$912000000$	$5174000000$	$507371000$	$507371000$	$44361751654000$	$443007300$	$2950000000$	$443007300$	$3459100000$	$443007300$	$3459100000$

Obrázek: **Klasifikace jednoduchých konečných grup** (jeden z nejrozsáhlejších projektů dějin matematiky). Všimněme si tzv. Monster grupy.

Zdroj: <https://cabinetmagazine.org>

# The Periodic Table Of Finite Simple Groups

$\mathbb{R}, \mathbb{C}_n, \mathbb{Z}_k$	1	Dynkin Diagrams of Simple Lie Algebras												$C_2$		
1	1													2		
$A_{(4)}, A_{(5)}$	$A_{(2)}$	$A_4$		$A_5$	$A_{(1)}$	$B_n$		$D_n$		$E_6$		$E_7$		$E_8$		
$A_5$	$A_{(1)}$	60	160													
$A_{(3)}, A_{(2)}^2$	$I_{G_2}^{(2)}/A_1^{(8)}$	360	580	$C_n$		$E_{6,7,8}$										
$A_7$	$A_{11}$	$E_6(2)$	$E_7(2)$	$E_8(2)$	$F_4(2)$	$G_2(3)$	$3D_4(2^2)$	$2E_6(2^2)$	$2B_2(2^3)$	$^{Tm^*}2F_4(2)^2$	$2G_2(3^2)$	$B_2(2)$	$C_4(3)$	$D_5(2)$	$2D_5(2^2)$	$2A_2(25)$
2320	600	<small>2344413794522 6035721579400</small>	<small>2344413794522 6035721579400</small>	<small>2344413794522 6035721579400</small>	<small>3151324 673366400</small>	<small>4245676 223341312</small>	<small>7631147400 7741051200</small>	<small>20120 17777200</small>	<small>104794464472 104794464472</small>	<small>14511220 14511220</small>	<small>45794776 4364991600</small>	<small>2349929359400 2349929359400</small>	<small>23431379359400 23431379359400</small>	<small>120000 120000</small>		
$A_6$	$A_{13}$	$E_6(3)$	$E_7(3)$	$E_8(3)$	$F_4(3)$	$G_2(4)$	$3D_4(3^2)$	$2E_6(3^2)$	$2B_2(2^5)$	$2F_4(2^3)$	$2G_2(3^5)$	$B_2(5)$	$C_3(7)$	$D_4(5)$	$2D_5(4^2)$	$2A_3(9)$
20160	1092	<small>2344413794522 6035721579400</small>	<small>2344413794522 6035721579400</small>	<small>2344413794522 6035721579400</small>	<small>31596580 6718447400</small>	<small>251596580 503605119613</small>	<small>801605119613 801605119613</small>	<small>32577600 3465051200</small>	<small>2445051200 2445051200</small>	<small>45425437 4364991600</small>	<small>44600000 44600000</small>	<small>271457230 271457230</small>	<small>45109352200 45109352200</small>	<small>47356472 47356472</small>	<small>52355930 52355930</small>	
$A_9$	$A_{17}$	$E_6(4)$	$E_7(4)$	$E_8(4)$	$F_4(4)$	$G_2(5)$	$3D_4(4^2)$	$2E_6(4^2)$	$2B_2(2^7)$	$2F_4(2^5)$	$2G_2(3^7)$	$B_2(7)$	$C_3(9)$	$D_5(5)$	$2D_5(5^2)$	$2A_2(64)$
131440	2448	<small>2344413794522 6035721579400</small>	<small>2344413794522 6035721579400</small>	<small>2344413794522 6035721579400</small>	<small>3159900000 61112944000</small>	<small>3159900000 61112944000</small>	<small>67162364 123132000</small>	<small>3410235000 3410235000</small>	<small>23018919200 23018919200</small>	<small>3321200 3321200</small>	<small>120951521700 120951521700</small>	<small>120951521700 120951521700</small>	<small>17300023200 17300023200</small>	<small>5335776 5335776</small>		
$A_8$	$E_6(q)$	$E_6(q)$	$E_7(q)$	$E_8(q)$	$F_4(q)$	$G_2(q)$	$3D_4(q^2)$	$2E_6(q^2)$	$1B_2(2q+1)$	$1F_4(2q+1)$	$2G_2(3q+1)$	$B_2(q)$	$C_3(q)$	$D_5(q)$	$2D_5(q^2)$	$2A_2(q^2)$
$\frac{n}{2}$	<small><math>\frac{2344413794522}{6035721579400}</math></small>															
<small>*The group <math>(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n</math> is not a group of Lie type, but is the product of other groups by which they are defined. It is not a simple group, so it does not have a Dynkin symbol. We do not need to include it here because it is not a simple group.</small>																
<small>**Groups starting on the second row are the classical groups. The remaining groups are classified by the number of nodes in their Dynkin symbols.</small>																
<small>***Simple groups are denoted by their order. <math>A_n(q)</math> and <math>C_n(q)</math> for <math>n &gt; 1</math>, and <math>A_n(q^2)</math> for odd <math>n</math>.</small>																
<small>****Copyright © 2008 from Andstein.</small>																
M <sub>11</sub>	M <sub>12</sub>	M <sub>22</sub>	M <sub>23</sub>	M <sub>24</sub>	J(0), J(0)	I <sub>1</sub>	I <sub>2</sub>	HJM	I <sub>3</sub>	I <sub>4</sub>	HS	McL	He	Ru		
7828	95000	445520	10100960	244283040	175560	604000	5032960	9677963000	44352000	999128000	4430073000	345910144000				
Suz	O'N	O-N	-3	-2	-4	C <sub>01</sub>	f <sub>0, D</sub>	H	LgS	I <sub>1</sub> , I <sub>2</sub>	M(32)	M(33)	F <sub>23</sub>	F <sub>24</sub> '	I <sub>1</sub> , M	
445345497600	460433509325	495760476400	42309421732000	5433000000	9120000000											

Obrázek: Klasifikace jednoduchých konečných grup (jeden z nejrozsáhlejších projektů dějin matematiky). Všimněme si tzv. Monster grupy.

Zdroj: <https://cabinetmagazine.org>

Děkuji za pozornost.