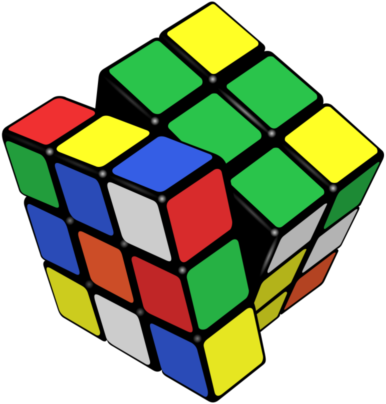
Lineární algebra 1

Martin Balko

5. přednáška

2. listopadu 2021

Grupy



Zdroj: https://wikipedia.org

Příklady

Příklady

- Příklady Abelových grup:

Příklady

- Příklady Abelových grup:
    1. $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$,

Příklady

- Příklady Abelových grup:
  1. $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$,
  2. $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$,

Příklady

- Příklady Abelových grup:
  1. $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$,
  2. $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$,
  3. grupa matic $(\mathbb{R}^{m\times n}, +)$, kde neutrálním prvkem je nulová matice $m \times n$ a inverzním prvkem k matici A je matice $-A$,

Příklady

- Příklady Abelových grup:
  1. $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$,
  2. $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$,
  3. grupa matic $(\mathbb{R}^{m \times n}, +)$, kde neutrálním prvkem je nulová matice $m \times n$ a inverzním prvkem k matici A je matice $-A$,
  4. konečná grupa $(\mathbb{Z}_m, +)$, kde $\mathbb{Z}_m = \{0, 1, \ldots, m-1\}$ a sčítání $+$ se provádí modulo m. Neutrálním prvkem je 0 a inverzním prvkem k a je $-a$ mod m.

Příklady

- Příklady Abelových grup:
  1. $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{C},+)$,
  2. $(\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot)$, $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$, $(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$,
  3. grupa matic $(\mathbb{R}^{m\times n},+)$, kde neutrálním prvkem je nulová matice $m\times n$ a inverzním prvkem k matici A je matice $-A$,
  4. konečná grupa $(\mathbb{Z}_m,+)$, kde $\mathbb{Z}_m=\{0,1,\ldots,m-1\}$ a sčítání $+$ se provádí modulo m. Neutrálním prvkem je 0 a inverzním prvkem k a je $-a$ mod m.
  5. grupa $(\{p(x)\colon p \text{ je polynom}\},+)$ polynomů se sčítáním.

Příklady

- Příklady Abelových grup:
  1. $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$,
  2. $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$,
  3. grupa matic $(\mathbb{R}^{m \times n}, +)$, kde neutrálním prvkem je nulová matice $m \times n$ a inverzním prvkem k matici A je matice $-A$,
  4. konečná grupa $(\mathbb{Z}_m, +)$, kde $\mathbb{Z}_m = \{0, 1, \ldots, m-1\}$ a sčítání $+$ se provádí modulo m. Neutrálním prvkem je 0 a inverzním prvkem k a je $-a$ mod m.
  5. grupa $(\{p(x) : p \text{ je polynom}\}, +)$ polynomů se sčítáním.
- Příklady ne nutně Abelových grup:

Příklady

- Příklady Abelových grup:
  1. $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$,
  2. $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$,
  3. grupa matic $(\mathbb{R}^{m \times n}, +)$, kde neutrálním prvkem je nulová matice $m \times n$ a inverzním prvkem k matici A je matice $-A$,
  4. konečná grupa $(\mathbb{Z}_m, +)$, kde $\mathbb{Z}_m = \{0, 1, \dots, m-1\}$ a sčítání $+$ se provádí modulo m. Neutrálním prvkem je 0 a inverzním prvkem k a je $-a$ mod m.
  5. grupa $(\{p(x) \colon p \text{ je polynom}\}, +)$ polynomů se sčítáním.

- Příklady ne nutně Abelových grup:
  1. množina všech bijekcí na množině s operací skládání,

Příklady

- Příklady Abelových grup:
  1. $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$,
  2. $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$,
  3. grupa matic $(\mathbb{R}^{m \times n}, +)$, kde neutrálním prvkem je nulová matice $m \times n$ a inverzním prvkem k matici A je matice $-A$,
  4. konečná grupa $(\mathbb{Z}_m, +)$, kde $\mathbb{Z}_m = \{0, 1, \dots, m-1\}$ a sčítání $+$ se provádí modulo m. Neutrálním prvkem je 0 a inverzním prvkem k a je $-a$ mod m.
  5. grupa $(\{p(x) \colon p \text{ je polynom}\}, +)$ polynomů se sčítáním.

- Příklady ne nutně Abelových grup:
  1. množina všech bijekcí na množině s operací skládání,
  2. množina regulárních matic řádu n s násobením.

Příklady

- Příklady Abelových grup:
  1. $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$,
  2. $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$,
  3. grupa matic $(\mathbb{R}^{m \times n}, +)$, kde neutrálním prvkem je nulová matice $m \times n$ a inverzním prvkem k matici A je matice $-A$,
  4. konečná grupa $(\mathbb{Z}_m, +)$, kde $\mathbb{Z}_m = \{0, 1, \dots, m-1\}$ a sčítání $+$ se provádí modulo m. Neutrálním prvkem je 0 a inverzním prvkem k a je $-a$ mod m.
  5. grupa $(\{p(x) \colon p \text{ je polynom}\}, +)$ polynomů se sčítáním.

- Příklady ne nutně Abelových grup:
  1. množina všech bijekcí na množině s operací skládání,
  2. množina regulárních matic řádu n s násobením.

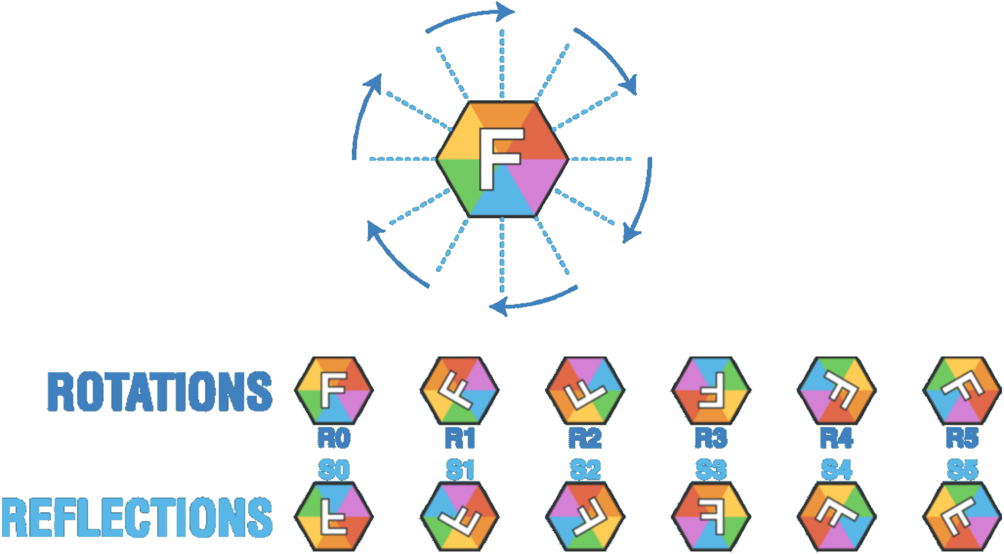
- Příklady negrup:

Příklady

- Příklady Abelových grup:
  1. $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$,
  2. $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$,
  3. grupa matic $(\mathbb{R}^{m \times n}, +)$, kde neutrálním prvkem je nulová matice $m \times n$ a inverzním prvkem k matici A je matice $-A$,
  4. konečná grupa $(\mathbb{Z}_m, +)$, kde $\mathbb{Z}_m = \{0, 1, \ldots, m-1\}$ a sčítání $+$ se provádí modulo m. Neutrálním prvkem je 0 a inverzním prvkem k a je $-a$ mod m.
  5. grupa $(\{p(x) \colon p \text{ je polynom}\}, +)$ polynomů se sčítáním.
- Příklady ne nutně Abelových grup:
  1. množina všech bijekcí na množině s operací skládání,
  2. množina regulárních matic řádu n s násobením.
- Příklady negrup:
  1. $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{Z}, -)$, $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, :)$.

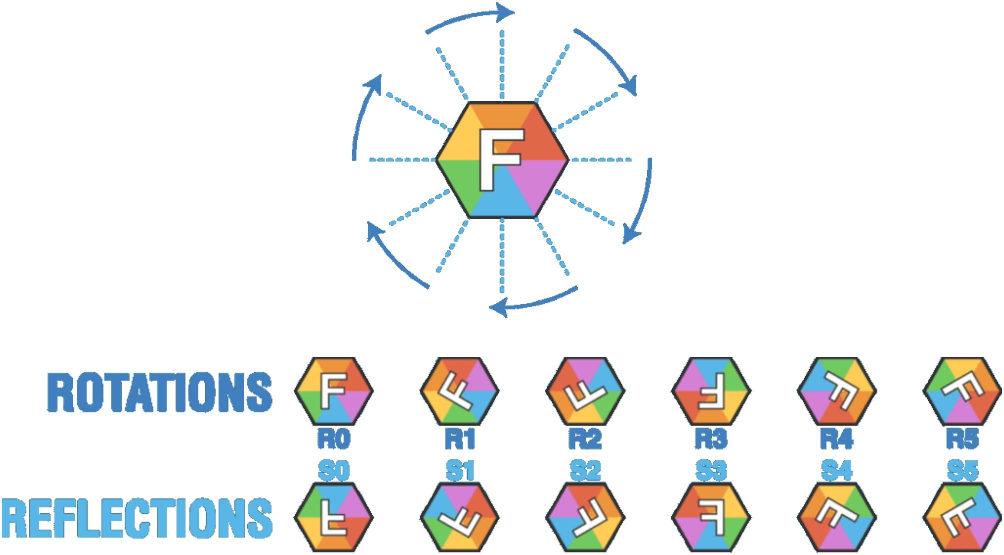
Exotičtější příklad grupy

Exotičtější příklad grupy



Zdroj: https://res.cloudinary.com

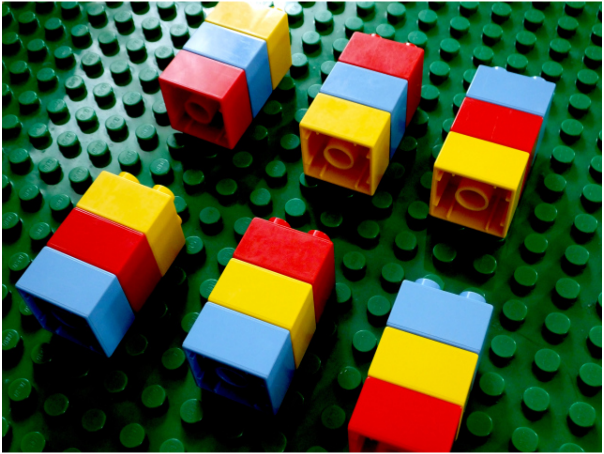
Exotičtější příklad grupy



Zdroj: https://res.cloudinary.com

Grupou symetrií hexagonu je tzv. dihedrální grupa D6 s 12 prvky.

Permutace

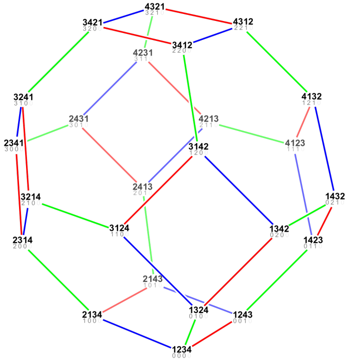


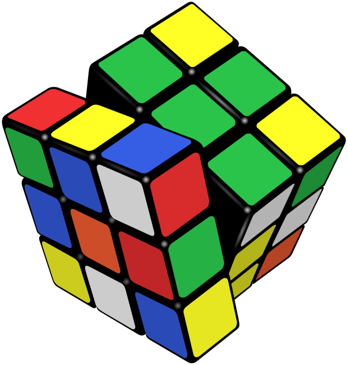
Zdroj: https://playcuriously.wordpress.com

Symetrická grupa

Symetrická grupa

- Množina permutací S_n tvoří s operací skládání $\circ$ takzvanou symetrickou grupu $(S_n, \circ)$.



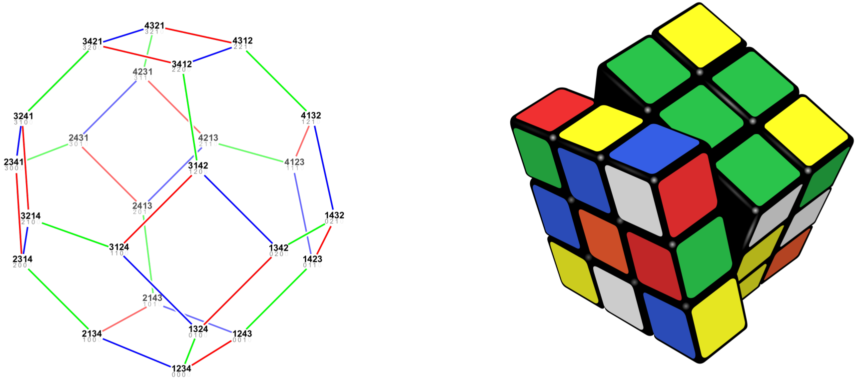


Obrázek: Reprezentace symetrické grupy S_4 a Rubikova kostka.

Zdroj: https://wikimedia.org

Symetrická grupa

- Množina permutací S_n tvoří s operací skládání $\circ$ takzvanou symetrickou grupu $(S_n, \circ)$.



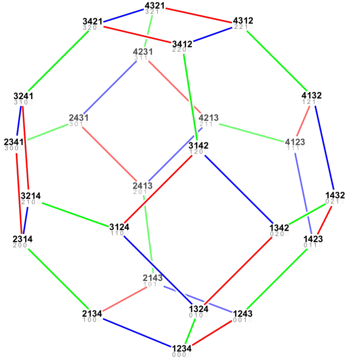
Obrázek: Reprezentace symetrické grupy S_4 a Rubikova kostka.

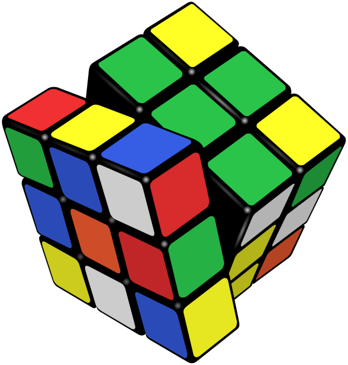
Zdroj: https://wikimedia.org

- Symetrické grupy popisují symetrie různých objektů.

Symetrická grupa

- Množina permutací S_n tvoří s operací skládání $\circ$ takzvanou symetrickou grupu $(S_n, \circ)$.

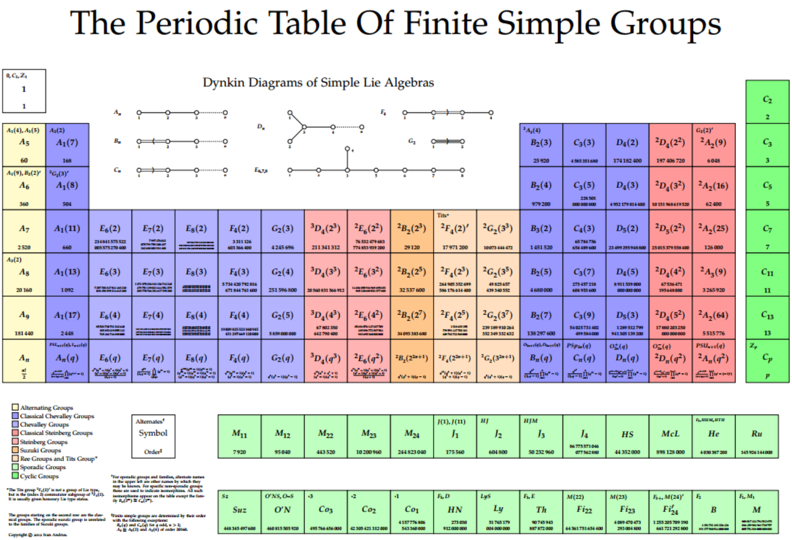




Obrázek: Reprezentace symetrické grupy S_4 a Rubikova kostka.

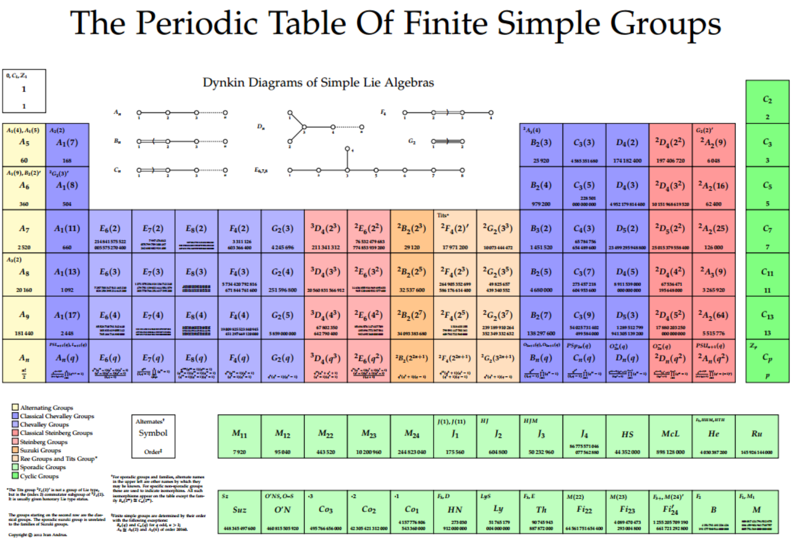
Zdroj: https://wikimedia.org

- Symetrické grupy popisují symetrie různých objektů.
- Každá grupa je isomorfní nějaké podgrupě symetrické grupy.



Obrázek: Klasifikace jednoduchých konečných grup (jeden z nejrozsáhlejších projektů dějin matematiky). Všimněme si tzv. Monster grupy.

Zdroj: https://cabinetmagazine.org



Obrázek: Klasifikace jednoduchých konečných grup (jeden z nejrozsáhlejších projektů dějin matematiky). Všimněme si tzv. Monster grupy.

Zdroj: https://cabinetmagazine.org

Děkuji za pozornost.