Lineární algebra 1

Martin Balko

1. přednáška

6. října 2021

Základní informace

Základní informace

- Základy lineární algebry (vektorové prostory, lineární zobrazení, řešení soustav lineárních rovnic, matice).

Základní informace

- Základy lineární algebry (vektorové prostory, lineární zobrazení, řešení soustav lineárních rovnic, matice).
- Stránky přednášky: *kam.mff.cuni.cz/~balko/ln12122*
  - informace o přednášce, probraná témata, prezentace, zápisky ...

Základní informace

- Základy lineární algebry (vektorové prostory, lineární zobrazení, řešení soustav lineárních rovnic, matice).
- Stránky přednášky: *kam.mff.cuni.cz/~balko/ln12122*
  - informace o přednášce, probraná témata, prezentace, zápisky ...
- Cvičení:
  - celkem 12 cvičení, viz stránky přednášky.
  - cvičení pro pokročilé (Martin Černý a Peter Zeman).

Základní informace

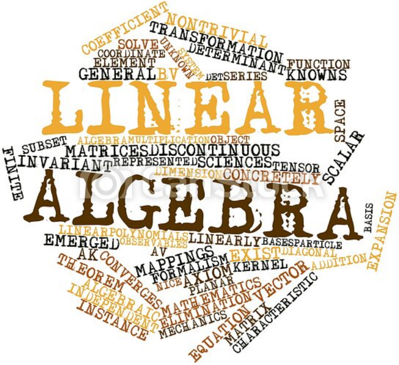
- Základy lineární algebry (vektorové prostory, lineární zobrazení, řešení soustav lineárních rovnic, matice).
- Stránky přednášky: *kam.mff.cuni.cz/~balko/ln12122*
  - informace o přednášce, probraná témata, prezentace, zápisky ...
- Cvičení:
  - celkem 12 cvičení, viz stránky přednášky.
  - cvičení pro pokročilé (Martin Černý a Peter Zeman).
- Doporučená literatura:
  - M. Hladík: Lineární algebra (nejen) pro informatiky.

Zdroj: https://matfyzpress.cz

Lineární algebra

Lineární algebra

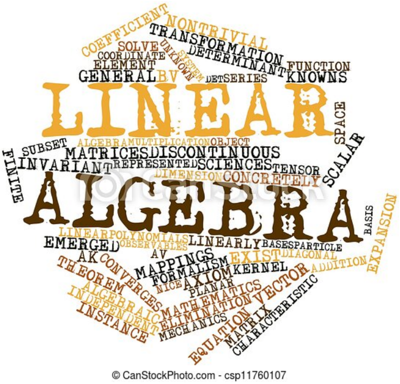
- odvětví matematiky, které se zabývá vektory, vektorovými prostory, soustavami lineárních rovnic a lineárními transformacemi.



Zdroj: Can Stock Photo

Lineární algebra

- odvětví matematiky, které se zabývá vektory, vektorovými prostory, soustavami lineárních rovnic a lineárními transformacemi.

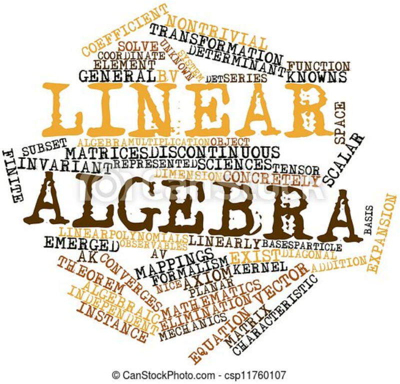


Zdroj: Can Stock Photo

- Úzce souvisí s geometrií. Dvojí pohled—algebraický a geometrický.

Lineární algebra

- odvětví matematiky, které se zabývá vektory, vektorovými prostory, soustavami lineárních rovnic a lineárními transformacemi.



Zdroj: Can Stock Photo

- Úzce souvisí s geometrií. Dvojí pohled—algebraický a geometrický.
- Důležité aplikace v praxi (například PageRank vyhledávače Google)

Sylabus

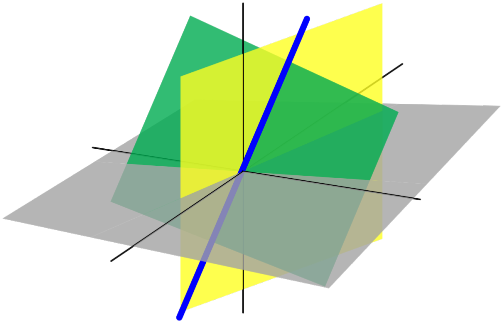
Sylabus

- Předběžný plán:

Sylabus

- Předběžný plán:
  - soustavy lineárních rovnic
    - maticový zápis, Gaussova eliminace, ...
  - matice
    - operace s maticemi, regulární a inverzní matice, ...
  - algebraické struktury
    - grupy, permutace, tělesa, ...
  - vektorové prostory
    - lineární kombinace, báze, dimenze, maticové prostory, ...
  - lineární zobrazení
    - obraz, jádro, matice přechodu, ...

Soustavy lineárních rovnic



Zdroj: https://en.wikipedia.org

Příklad soustavy lineárních rovnic

Příklad soustavy lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 3x + 2y + 1z &= 39, \\ 2x + 3y + 1z &= 34, \\ 1x + 2y + 3z &= 26. \end{aligned}$$

Jedná se o nejstarší zaznamenanou soustavu (200 př.n.l.).

Příklad rozšířené matice soustavy

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 1 & 3 & 1 & 34 \\ 1 & 2 & 3 & 26 \end{array}\right)$$

Geometrický význam řešení soustavy lineárních rovnic

Geometrický význam řešení soustavy lineárních rovnic

- Uvažme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých ($m = n = 2$)

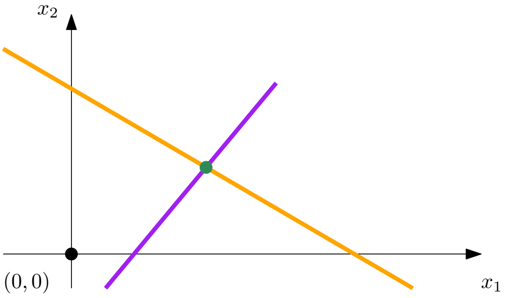
$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 &= b_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 &= b_2. \end{aligned}$$

Geometrický význam řešení soustavy lineárních rovnic

- Uvažme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých ($m = n = 2$)

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 &= b_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 &= b_2. \end{aligned}$$

- Nejsou-li v rovnici oba koeficienty $a_{i,j}$ nulové, pak rovnice odpovídá přímce. Řešení pak odpovídá průniku dvou přímek v rovině.



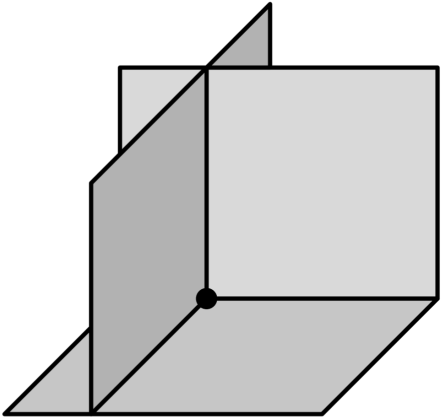
Geometrický význam řešení soustavy lineárních rovnic

Geometrický význam řešení soustavy lineárních rovnic

- Obecně dostáváme pro rovnice s nenulovými koeficienty průniky nadrovin. Například pro $m = n = 3$ máme průniky tří rovin v 3-rozměrném prostoru.

Geometrický význam řešení soustavy lineárních rovnic

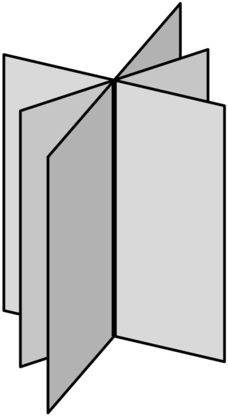
- Obecně dostáváme pro rovnice s nenulovými koeficienty průniky nadrovin. Například pro $m = n = 3$ máme průniky tří rovin v 3-rozměrném prostoru.



Zdroj: M. Hladík: Lineární algebra (nejen) pro informatiky.

Geometrický význam řešení soustavy lineárních rovnic

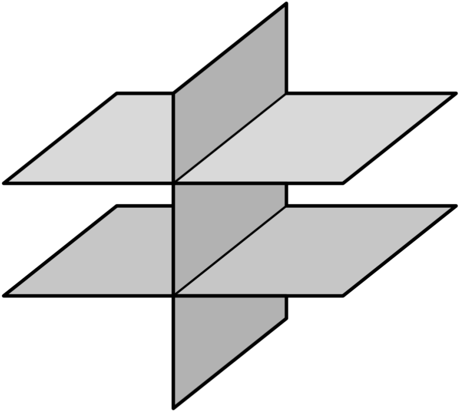
- Obecně dostáváme pro rovnice s nenulovými koeficienty průniky nadrovin. Například pro $m = n = 3$ máme průniky tří rovin v 3-rozměrném prostoru.



Zdroj: M. Hladík: Lineární algebra (nejen) pro informatiky.

Geometrický význam řešení soustavy lineárních rovnic

- Obecně dostáváme pro rovnice s nenulovými koeficienty průniky nadrovin. Například pro $m = n = 3$ máme průniky tří rovin v 3-rozměrném prostoru.



Zdroj: M. Hladík: Lineární algebra (nejen) pro informatiky.

Gaussova eliminace

Gaussova eliminace

- Metoda, jak vyřešit libovolnou soustavu m lineárních rovnic o n neznámých.

Gaussova eliminace

- Metoda, jak vyřešit libovolnou soustavu m lineárních rovnic o n neznámých.

Obrázek: Carl Frierich Gauss (1777–1855).

Odstupňovaný tvar matice

Odstupňovaný tvar matice

- Tyto matice jsou v odstupňovaném tvaru. Pivoty jsou značeny oranžově.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Odstupňovaný tvar matice

- Tyto matice jsou v odstupňovaném tvaru. Pivoty jsou značeny oranžově.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

- Tyto matice v odstupňovaném tvaru nejsou

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Převod na odstupňovaný tvar matice

Převod na odstupňovaný tvar matice

- Následující matici převedeme do odstupňovaného tvaru. Fialově je značený prvek na pozici (i, j).

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 5 \\ 4 & 5 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Převod na odstupňovaný tvar matice

- Následující matici převedeme do odstupňovaného tvaru. Fialově je značený prvek na pozici (i, j).

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 5 \\ 4 & 5 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

- Použijeme Krok 5 algoritmu $\mathrm{REF}(A)$.

Převod na odstupňovaný tvar matice

- Následující matici převedeme do odstupňovaného tvaru. Fialově je značený prvek na pozici (i, j).

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Převod na odstupňovaný tvar matice

- Následující matici převedeme do odstupňovaného tvaru. Fialově je značený prvek na pozici (i, j).

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

- Použijeme Krok 5 algoritmu $\mathrm{REF}(A)$.

Převod na odstupňovaný tvar matice

- Následující matici převedeme do odstupňovaného tvaru. Fialově je značený prvek na pozici (i, j).

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Převod na odstupňovaný tvar matice

- Následující matici převedeme do odstupňovaného tvaru. Fialově je značený prvek na pozici (i, j).

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

- Použijeme Krok 5 algoritmu $\mathrm{REF}(A)$.

Převod na odstupňovaný tvar matice

- Následující matici převedeme do odstupňovaného tvaru. Fialově je značený prvek na pozici (i, j).

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Převod na odstupňovaný tvar matice

- Následující matici převedeme do odstupňovaného tvaru. Fialově je značený prvek na pozici (i, j).

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

- Použijeme Krok 6 algoritmu $\mathrm{REF}(A)$.

Převod na odstupňovaný tvar matice

- Následující matici převedeme do odstupňovaného tvaru. Fialově je značený prvek na pozici (i, j).

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Převod na odstupňovaný tvar matice

- Následující matici převedeme do odstupňovaného tvaru. Fialově je značený prvek na pozici (i, j).

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

- Použijeme Krok 5 algoritmu $\mathrm{REF}(A)$.

Převod na odstupňovaný tvar matice

- Následující matici převedeme do odstupňovaného tvaru. Fialově je značený prvek na pozici (i, j).

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Převod na odstupňovaný tvar matice

- Následující matici převedeme do odstupňovaného tvaru. Fialově je značený prvek na pozici (i, j).

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

- Použijeme Krok 5 algoritmu $\mathrm{REF}(A)$.

Převod na odstupňovaný tvar matice

- Následující matici převedeme do odstupňovaného tvaru. Fialově je značený prvek na pozici (i, j).

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Převod na odstupňovaný tvar matice

- Následující matici převedeme do odstupňovaného tvaru. Fialově je značený prvek na pozici (i, j).

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- Použijeme Krok 6 algoritmu $\mathrm{REF}(A)$.

Převod na odstupňovaný tvar matice

- Následující matici převedeme do odstupňovaného tvaru. Fialově je značený prvek na pozici (i, j).

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Převod na odstupňovaný tvar matice

- Následující matici převedeme do odstupňovaného tvaru. Fialově je značený prvek na pozici (i, j).

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- Použijeme Krok 3 algoritmu $\mathrm{REF}(A)$.

Převod na odstupňovaný tvar matice

- Následující matici převedeme do odstupňovaného tvaru. Fialově je značený prvek na pozici (i, j).

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Převod na odstupňovaný tvar matice

- Následující matici převedeme do odstupňovaného tvaru. Fialově je značený prvek na pozici (i, j).

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- Použijeme Krok 5 algoritmu $\mathrm{REF}(A)$.

Převod na odstupňovaný tvar matice

- Následující matici převedeme do odstupňovaného tvaru. Fialově je značený prvek na pozici (i, j).

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Převod na odstupňovaný tvar matice

- Následující matici převedeme do odstupňovaného tvaru. Fialově je značený prvek na pozici (i, j).

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- A máme hotovo.

Převod na odstupňovaný tvar matice

- Následující matici převedeme do odstupňovaného tvaru. Fialově je značený prvek na pozici (i, j).

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- A máme hotovo.