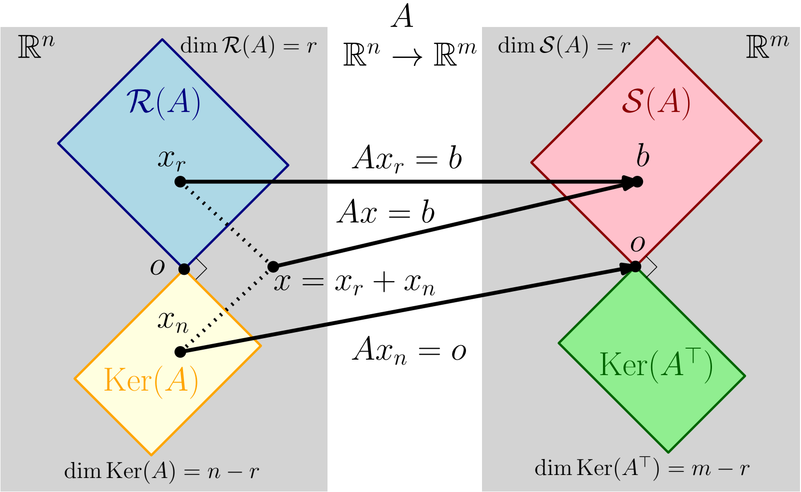
Lineární algebra 1

Martin Balko

8. přednáška

19. listopadu 2020

Maticové prostory



$$Ax = A(x_r + x_n) = Ax_r + Ax_n = Ax_r$$

Maticové prostory

Maticové prostory

- Skloubíme teorii matic s teorií vektorových prostorů.

Maticové prostory

- Skloubíme teorii matic s teorií vektorových prostorů.
- Pro matici $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ zavedeme následující prostory:

Maticové prostory

- Skloubíme teorii matic s teorií vektorových prostorů.
- Pro matici $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ zavedeme následující prostory:
  - sloupcový prostor $\mathcal{S}(A) = \mathrm{span}\{A_{*1}, \ldots, A_{*n}\}$,

Maticové prostory

- Skloubíme teorii matic s teorií vektorových prostorů.
- Pro matici $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ zavedeme následující prostory:
  - sloupcový prostor $\mathcal{S}(A) = \mathrm{span}\{A_{*1}, \ldots, A_{*n}\}$,
  - řádkový prostor $\mathcal{R}(A) = \mathrm{span}\{A_{1*}, \ldots, A_{m*}\}$

Maticové prostory

- Skloubíme teorii matic s teorií vektorových prostorů.
- Pro matici $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ zavedeme následující prostory:
  - sloupcový prostor $\mathcal{S}(A) = \operatorname{span}\{A_{*1}, \dots, A_{*n}\}$,
  - řádkový prostor $\mathcal{R}(A) = \operatorname{span}\{A_{1*}, \dots, A_{m*}\} = \mathcal{S}(A^\top)$,

Maticové prostory

- Skloubíme teorii matic s teorií vektorových prostorů.
- Pro matici $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ zavedeme následující prostory:
  - sloupcový prostor $\mathcal{S}(A) = \mathrm{span}\{A_{*1}, \ldots, A_{*n}\}$,
  - řádkový prostor $\mathcal{R}(A) = \mathrm{span}\{A_{1*}, \ldots, A_{m*}\} = \mathcal{S}(A^\top)$,
  - jádro $\mathrm{Ker}(A) = \{x \in \mathbb{T}^n \colon Ax = o\}$.

Maticové prostory

- Skloubíme teorii matic s teorií vektorových prostorů.
- Pro matici $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ zavedeme následující prostory:
  - sloupcový prostor $\mathcal{S}(A) = \operatorname{span}\{A_{*1}, \ldots, A_{*n}\}$,
  - řádkový prostor $\mathcal{R}(A) = \operatorname{span}\{A_{1*}, \ldots, A_{m*}\} = \mathcal{S}(A^\top)$,
  - jádro $\operatorname{Ker}(A) = \{x \in \mathbb{T}^n \colon Ax = o\}$.

- Z definice je sloupcový prostor podprostorem $\mathbb{T}^m$

Maticové prostory

- Skloubíme teorii matic s teorií vektorových prostorů.
- Pro matici $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ zavedeme následující prostory:
  - sloupcový prostor $\mathcal{S}(A) = \mathrm{span}\{A_{*1}, \ldots, A_{*n}\}$,
  - řádkový prostor $\mathcal{R}(A) = \mathrm{span}\{A_{1*}, \ldots, A_{m*}\} = \mathcal{S}(A^\top)$,
  - jádro $\mathrm{Ker}(A) = \{x \in \mathbb{T}^n \colon Ax = o\}$.
- Z definice je sloupcový prostor podprostorem $\mathbb{T}^m$ a podobně řádkový prostor je podprostorem $\mathbb{T}^n$.

Maticové prostory

- Skloubíme teorii matic s teorií vektorových prostorů.
- Pro matici $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ zavedeme následující prostory:
  - sloupcový prostor $\mathcal{S}(A) = \mathrm{span}\{A_{*1}, \ldots, A_{*n}\}$,
  - řádkový prostor $\mathcal{R}(A) = \mathrm{span}\{A_{1*}, \ldots, A_{m*}\} = \mathcal{S}(A^\top)$,
  - jádro $\mathrm{Ker}(A) = \{x \in \mathbb{T}^n \colon Ax = o\}$.

- Z definice je sloupcový prostor podprostorem $\mathbb{T}^m$ a podobně řádkový prostor je podprostorem $\mathbb{T}^n$.
- Ukážeme, že jádro je podprostorem $\mathbb{T}^n$:

Maticové prostory

- Skloubíme teorii matic s teorií vektorových prostorů.
- Pro matici $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ zavedeme následující prostory:
  - sloupcový prostor $\mathcal{S}(A) = \mathrm{span}\{A_{*1}, \ldots, A_{*n}\}$,
  - řádkový prostor $\mathcal{R}(A) = \mathrm{span}\{A_{1*}, \ldots, A_{m*}\} = \mathcal{S}(A^\top)$,
  - jádro $\mathrm{Ker}(A) = \{x \in \mathbb{T}^n \colon Ax = o\}$.

- Z definice je sloupcový prostor podprostorem $\mathbb{T}^m$ a podobně řádkový prostor je podprostorem $\mathbb{T}^n$.
- Ukážeme, že jádro je podprostorem $\mathbb{T}^n$:
  - $o \in \mathrm{Ker}(A)$, protože $Ao = o$,

Maticové prostory

- Skloubíme teorii matic s teorií vektorových prostorů.
- Pro matici $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$ zavedeme následující prostory:
  - sloupcový prostor $\mathcal{S}(A) = \mathrm{span}\{A_{*1}, \ldots, A_{*n}\}$,
  - řádkový prostor $\mathcal{R}(A) = \mathrm{span}\{A_{1*}, \ldots, A_{m*}\} = \mathcal{S}(A^\top)$,
  - jádro $\mathrm{Ker}(A) = \{x \in \mathbb{T}^n \colon Ax = o\}$.

- Z definice je sloupcový prostor podprostorem $\mathbb{T}^m$ a podobně řádkový prostor je podprostorem $\mathbb{T}^n$.
- Ukážeme, že jádro je podprostorem $\mathbb{T}^n$:
  - $o \in \mathrm{Ker}(A)$, protože $Ao = o$,
  - Uzavřenost na součty: pro $x, y \in \mathrm{Ker}(A)$ platí $Ax, Ay = o$

Maticové prostory

- Skloubíme teorii matic s teorií vektorových prostorů.
- Pro matici $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$ zavedeme následující prostory:
  - sloupcový prostor $\mathcal{S}(A) = \mathrm{span}\{A_{*1}, \dots, A_{*n}\}$,
  - řádkový prostor $\mathcal{R}(A) = \mathrm{span}\{A_{1*}, \dots, A_{m*}\} = \mathcal{S}(A^\top)$,
  - jádro $\mathrm{Ker}(A) = \{x \in \mathbb{T}^n \colon Ax = o\}$.

- Z definice je sloupcový prostor podprostorem $\mathbb{T}^m$ a podobně řádkový prostor je podprostorem $\mathbb{T}^n$.
- Ukážeme, že jádro je podprostorem $\mathbb{T}^n$:
  - $o \in \mathrm{Ker}(A)$, protože $Ao = o$,
  - Uzavřenost na součty: pro $x, y \in \mathrm{Ker}(A)$ platí $Ax, Ay = o$ a tedy $A(x + y) = Ax + Ay = o + o = o$.

Maticové prostory

- Skloubíme teorii matic s teorií vektorových prostorů.
- Pro matici $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$ zavedeme následující prostory:
  - sloupcový prostor $\mathcal{S}(A) = \mathrm{span}\{A_{*1}, \dots, A_{*n}\}$,
  - řádkový prostor $\mathcal{R}(A) = \mathrm{span}\{A_{1*}, \dots, A_{m*}\} = \mathcal{S}(A^\top)$,
  - jádro $\mathrm{Ker}(A) = \{x \in \mathbb{T}^n \colon Ax = o\}$.

- Z definice je sloupcový prostor podprostorem $\mathbb{T}^m$ a podobně řádkový prostor je podprostorem $\mathbb{T}^n$.
- Ukážeme, že jádro je podprostorem $\mathbb{T}^n$:
  - $o \in \mathrm{Ker}(A)$, protože $Ao = o$,
  - Uzavřenost na součty: pro $x, y \in \mathrm{Ker}(A)$ platí $Ax, Ay = o$ a tedy $A(x + y) = Ax + Ay = o + o = o$. Takže $x + y \in \mathrm{Ker}(A)$.

Maticové prostory

- Skloubíme teorii matic s teorií vektorových prostorů.
- Pro matici $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ zavedeme následující prostory:
  - sloupcový prostor $\mathcal{S}(A) = \operatorname{span}\{A_{*1}, \ldots, A_{*n}\}$,
  - řádkový prostor $\mathcal{R}(A) = \operatorname{span}\{A_{1*}, \ldots, A_{m*}\} = \mathcal{S}(A^\top)$,
  - jádro $\operatorname{Ker}(A) = \{x \in \mathbb{T}^n \colon Ax = o\}$.

- Z definice je sloupcový prostor podprostorem $\mathbb{T}^m$ a podobně řádkový prostor je podprostorem $\mathbb{T}^n$.
- Ukážeme, že jádro je podprostorem $\mathbb{T}^n$:
  - $o \in \operatorname{Ker}(A)$, protože $Ao = o$,
  - Uzavřenost na součty: pro $x, y \in \operatorname{Ker}(A)$ platí $Ax, Ay = o$ a tedy $A(x + y) = Ax + Ay = o + o = o$. Takže $x + y \in \operatorname{Ker}(A)$.
  - Uzavřenost na násobky: pro $x \in \operatorname{Ker}(A)$ platí $Ax = o$

Maticové prostory

- Skloubíme teorii matic s teorií vektorových prostorů.
- Pro matici $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ zavedeme následující prostory:
  - sloupcový prostor $\mathcal{S}(A) = \mathrm{span}\{A_{*1}, \dots, A_{*n}\}$,
  - řádkový prostor $\mathcal{R}(A) = \mathrm{span}\{A_{1*}, \dots, A_{m*}\} = \mathcal{S}(A^\top)$,
  - jádro $\mathrm{Ker}(A) = \{x \in \mathbb{T}^n \colon Ax = o\}$.

- Z definice je sloupcový prostor podprostorem $\mathbb{T}^m$ a podobně řádkový prostor je podprostorem $\mathbb{T}^n$.
- Ukážeme, že jádro je podprostorem $\mathbb{T}^n$:
  - $o \in \mathrm{Ker}(A)$, protože $Ao = o$,
  - Uzavřenost na součty: pro $x, y \in \mathrm{Ker}(A)$ platí $Ax, Ay = o$ a tedy $A(x + y) = Ax + Ay = o + o = o$. Takže $x + y \in \mathrm{Ker}(A)$.
  - Uzavřenost na násobky: pro $x \in \mathrm{Ker}(A)$ platí $Ax = o$ a tedy pro každé $\alpha \in \mathbb{T}$ platí $A(\alpha x) = \alpha(Ax) = \alpha o = o$.

Maticové prostory

- Skloubíme teorii matic s teorií vektorových prostorů.
- Pro matici $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$ zavedeme následující prostory:
  - sloupcový prostor $\mathcal{S}(A) = \mathrm{span}\{A_{*1}, \dots, A_{*n}\}$,
  - řádkový prostor $\mathcal{R}(A) = \mathrm{span}\{A_{1*}, \dots, A_{m*}\} = \mathcal{S}(A^\top)$,
  - jádro $\mathrm{Ker}(A) = \{x \in \mathbb{T}^n \colon Ax = o\}$.

- Z definice je sloupcový prostor podprostorem $\mathbb{T}^m$ a podobně řádkový prostor je podprostorem $\mathbb{T}^n$.
- Ukážeme, že jádro je podprostorem $\mathbb{T}^n$:
  - $o \in \mathrm{Ker}(A)$, protože $Ao = o$,
  - Uzavřenost na součty: pro $x, y \in \mathrm{Ker}(A)$ platí $Ax, Ay = o$ a tedy $A(x + y) = Ax + Ay = o + o = o$. Takže $x + y \in \mathrm{Ker}(A)$.
  - Uzavřenost na násobky: pro $x \in \mathrm{Ker}(A)$ platí $Ax = o$ a tedy pro každé $\alpha \in \mathbb{T}$ platí $A(\alpha x) = \alpha(Ax) = \alpha o = o$. Takže $\alpha x \in \mathrm{Ker}(A)$.

Příklady maticových prostorů

Příklady maticových prostorů

- Mějme reálnou matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklady maticových prostorů

- Mějme reálnou matici
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
- Sloupcovým prostorem je $\mathcal{S}(A) = \mathrm{span}\{(1,0)^\top, (1,1)^\top, (1,0)^\top\}$

Příklady maticových prostorů

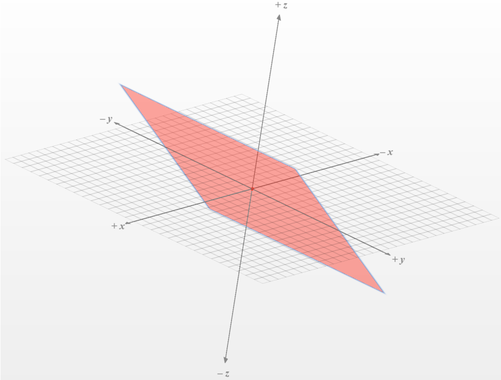
- Mějme reálnou matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Sloupcovým prostorem je $\mathcal{S}(A) = \mathrm{span}\{(1,0)^\top, (1,1)^\top, (1,0)^\top\} = \mathbb{R}^2$.

Příklady maticových prostorů

- Mějme reálnou matici
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
- Sloupcovým prostorem je $\mathcal{S}(A) = \mathrm{span}\{(1,0)^\top, (1,1)^\top, (1,0)^\top\} = \mathbb{R}^2$.
- Řádkovým prostorem je $\mathcal{R}(A) = \mathrm{span}\{(1,1,1)^\top, (0,1,0)^\top\}$.

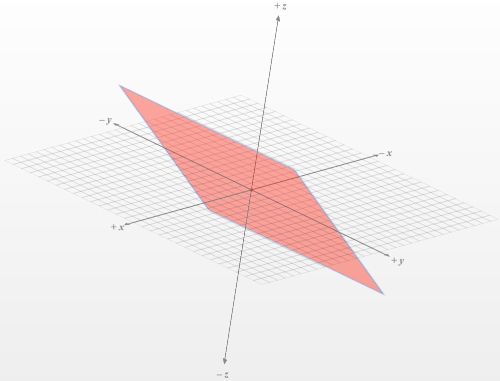


Příklady maticových prostorů

- Mějme reálnou matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

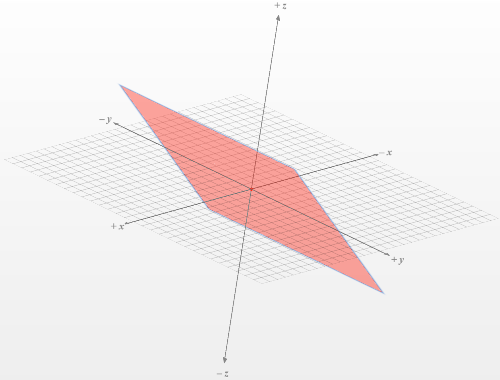
- Sloupcovým prostorem je $\mathcal{S}(A) = \operatorname{span}\{(1,0)^\top, (1,1)^\top, (1,0)^\top\} = \mathbb{R}^2$.
- Řádkovým prostorem je $\mathcal{R}(A) = \operatorname{span}\{(1,1,1)^\top, (0,1,0)^\top\}$.



- Jádrem je $\operatorname{Ker}(A) = \{(x, 0, -x) \colon x \in \mathbb{R}\}$

Příklady maticových prostorů

- Mějme reálnou matici
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
- Sloupcovým prostorem je $\mathcal{S}(A) = \mathrm{span}\{(1,0)^\top, (1,1)^\top, (1,0)^\top\} = \mathbb{R}^2$.
- Řádkovým prostorem je $\mathcal{R}(A) = \mathrm{span}\{(1,1,1)^\top, (0,1,0)^\top\}$.



- Jádrem je $\mathrm{Ker}(A) = \{(x, 0, -x) \colon x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{span}\{(1, 0, -1)^\top\}$.

Základní vlastnosti maticových prostorů

Základní vlastnosti maticových prostorů

- Protože lineární obal je množinou lineárních kombinací, tak dostáváme:

Základní vlastnosti maticových prostorů

- Protože lineární obal je množinou lineárních kombinací, tak dostáváme:

Tvrzení

Pro $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ platí

$$\mathcal{S}(A) = \{Ax \colon x \in \mathbb{T}^n\} \quad \text{a} \quad \mathcal{R}(A) = \{A^\top y \colon y \in \mathbb{T}^m\}.$$

Základní vlastnosti maticových prostorů

- Protože lineární obal je množinou lineárních kombinací, tak dostáváme:

Tvrzení

Pro $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ platí

$$\mathcal{S}(A) = \{Ax \colon x \in \mathbb{T}^n\} \quad \text{a} \quad \mathcal{R}(A) = \{A^\top y \colon y \in \mathbb{T}^m\}.$$

- Důkaz:

Základní vlastnosti maticových prostorů

- Protože lineární obal je množinou lineárních kombinací, tak dostáváme:

Tvrzení

Pro $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$ platí

$$\mathcal{S}(A) = \{Ax : x \in \mathbb{T}^n\} \quad \text{a} \quad \mathcal{R}(A) = \{A^\top y : y \in \mathbb{T}^m\}.$$

- Důkaz: Plyne z toho, že $Ax = \sum_{j=1}^{n} x_j A_{*j}$ je lineární kombinací sloupců matice A

Základní vlastnosti maticových prostorů

- Protože lineární obal je množinou lineárních kombinací, tak dostáváme:

Tvrzení

Pro $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ platí

$$\mathcal{S}(A) = \{Ax \colon x \in \mathbb{T}^n\} \quad \text{a} \quad \mathcal{R}(A) = \{A^\top y \colon y \in \mathbb{T}^m\}.$$

- Důkaz: Plyne z toho, že $Ax = \sum_{j=1}^{n} x_j A_{*j}$ je lineární kombinací sloupců matice A a $A^\top y = \sum_{i=1}^{m} A_{i*}^\top y_i$ je lineární kombinací řádků matice A.

Základní vlastnosti maticových prostorů

- Protože lineární obal je množinou lineárních kombinací, tak dostáváme:

Tvrzení

Pro $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ platí

$$\mathcal{S}(A) = \{Ax \colon x \in \mathbb{T}^n\} \quad \text{a} \quad \mathcal{R}(A) = \{A^\top y \colon y \in \mathbb{T}^m\}.$$

- Důkaz: Plyne z toho, že $Ax = \sum_{j=1}^{n} x_j A_{*j}$ je lineární kombinací sloupců matice A a $A^\top y = \sum_{i=1}^{m} A_{i*}^\top y_i$ je lineární kombinací řádků matice A. $\square$

Základní vlastnosti maticových prostorů

- Protože lineární obal je množinou lineárních kombinací, tak dostáváme:

Tvrzení

Pro $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$ platí

$$\mathcal{S}(A) = \{Ax \colon x \in \mathbb{T}^n\} \quad \text{a} \quad \mathcal{R}(A) = \{A^\top y \colon y \in \mathbb{T}^m\}.$$

- Důkaz: Plyne z toho, že $Ax = \sum_{j=1}^{n} x_j A_{*j}$ je lineární kombinací sloupců matice A a $A^\top y = \sum_{i=1}^{m} A_{i*}^\top y_i$ je lineární kombinací řádků matice A. $\square$
- Každý vektorový podprostor prostoru $\mathbb{T}^n$ lze reprezentovat maticově.

Základní vlastnosti maticových prostorů

- Protože lineární obal je množinou lineárních kombinací, tak dostáváme:

Tvrzení

Pro $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ platí

$$\mathcal{S}(A) = \{Ax \colon x \in \mathbb{T}^n\} \quad \text{a} \quad \mathcal{R}(A) = \{A^\top y \colon y \in \mathbb{T}^m\}.$$

- Důkaz: Plyne z toho, že $Ax = \sum_{j=1}^{n} x_j A_{*j}$ je lineární kombinací sloupců matice A a $A^\top y = \sum_{i=1}^{m} A_{i*}^\top y_i$ je lineární kombinací řádků matice A. $\square$
- Každý vektorový podprostor prostoru $\mathbb{T}^n$ lze reprezentovat maticově.

Tvrzení

Pro $V \Subset \mathbb{T}^n$ existují matice $A \in \mathbb{T}^{n \times m}$ a $B, C \in \mathbb{T}^{m \times n}$ takové, že

$$V = \mathcal{S}(A) \quad \text{a} \quad V = \mathcal{R}(B) \quad \text{a} \quad V = \mathrm{Ker}(C).$$

Základní vlastnosti maticových prostorů

- Protože lineární obal je množinou lineárních kombinací, tak dostáváme:

Tvrzení

Pro $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ platí

$$\mathcal{S}(A) = \{Ax\colon x \in \mathbb{T}^n\} \quad \text{a} \quad \mathcal{R}(A) = \{A^\top y\colon y \in \mathbb{T}^m\}.$$

- Důkaz: Plyne z toho, že $Ax = \sum_{j=1}^{n} x_j A_{*j}$ je lineární kombinací sloupců matice A a $A^\top y = \sum_{i=1}^{m} A_{i*}^\top y_i$ je lineární kombinací řádků matice A. $\square$
- Každý vektorový podprostor prostoru $\mathbb{T}^n$ lze reprezentovat maticově.

Tvrzení

Pro $V \Subset \mathbb{T}^n$ existují matice $A \in \mathbb{T}^{n \times m}$ a $B, C \in \mathbb{T}^{m \times n}$ takové, že

$$V = \mathcal{S}(A) \quad \text{a} \quad V = \mathcal{R}(B) \quad \text{a} \quad V = \mathrm{Ker}(C).$$

- Důkaz:

Základní vlastnosti maticových prostorů

- Protože lineární obal je množinou lineárních kombinací, tak dostáváme:

Tvrzení

Pro $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ platí

$$\mathcal{S}(A) = \{Ax \colon x \in \mathbb{T}^n\} \quad \text{a} \quad \mathcal{R}(A) = \{A^\top y \colon y \in \mathbb{T}^m\}.$$

- Důkaz: Plyne z toho, že $Ax = \sum_{j=1}^{n} x_j A_{*j}$ je lineární kombinací sloupců matice A a $A^\top y = \sum_{i=1}^{m} A_{i*}^\top y_i$ je lineární kombinací řádků matice A. $\square$
- Každý vektorový podprostor prostoru $\mathbb{T}^n$ lze reprezentovat maticově.

Tvrzení

Pro $V \Subset \mathbb{T}^n$ existují matice $A \in \mathbb{T}^{n \times m}$ a $B, C \in \mathbb{T}^{m \times n}$ takové, že

$$V = \mathcal{S}(A) \quad \text{a} \quad V = \mathcal{R}(B) \quad \text{a} \quad V = \mathrm{Ker}(C).$$

- Důkaz: Stačí, aby generátory $v_1, \ldots, v_m$ podprostoru V tvořily sloupce A a řádky B.

Základní vlastnosti maticových prostorů

- Protože lineární obal je množinou lineárních kombinací, tak dostáváme:

Tvrzení

Pro $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$ platí

$$\mathcal{S}(A) = \{Ax \colon x \in \mathbb{T}^n\} \quad \text{a} \quad \mathcal{R}(A) = \{A^\top y \colon y \in \mathbb{T}^m\}.$$

- Důkaz: Plyne z toho, že $Ax = \sum_{j=1}^n x_j A_{*j}$ je lineární kombinací sloupců matice A a $A^\top y = \sum_{i=1}^m A_{i*}^\top y_i$ je lineární kombinací řádků matice A. $\square$
- Každý vektorový podprostor prostoru $\mathbb{T}^n$ lze reprezentovat maticově.

Tvrzení

Pro $V \Subset \mathbb{T}^n$ existují matice $A \in \mathbb{T}^{n\times m}$ a $B, C \in \mathbb{T}^{m\times n}$ takové, že

$$V = \mathcal{S}(A) \quad \text{a} \quad V = \mathcal{R}(B) \quad \text{a} \quad V = \mathrm{Ker}(C).$$

- Důkaz: Stačí, aby generátory $v_1, \ldots, v_m$ podprostoru V tvořily sloupce A a řádky B. Tvrzení o jádru si dokážeme později.

Základní vlastnosti maticových prostorů

- Protože lineární obal je množinou lineárních kombinací, tak dostáváme:

Tvrzení

Pro $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$ platí

$$\mathcal{S}(A) = \{Ax \colon x \in \mathbb{T}^n\} \quad \text{a} \quad \mathcal{R}(A) = \{A^\top y \colon y \in \mathbb{T}^m\}.$$

- Důkaz: Plyne z toho, že $Ax = \sum_{j=1}^{n} x_j A_{*j}$ je lineární kombinací sloupců matice A a $A^\top y = \sum_{i=1}^{m} A_{i*}^\top y_i$ je lineární kombinací řádků matice A. $\square$
- Každý vektorový podprostor prostoru $\mathbb{T}^n$ lze reprezentovat maticově.

Tvrzení

Pro $V \Subset \mathbb{T}^n$ existují matice $A \in \mathbb{T}^{n\times m}$ a $B, C \in \mathbb{T}^{m\times n}$ takové, že

$$V = \mathcal{S}(A) \quad \text{a} \quad V = \mathcal{R}(B) \quad \text{a} \quad V = \mathrm{Ker}(C).$$

- Důkaz: Stačí, aby generátory $v_1, \ldots, v_m$ podprostoru V tvořily sloupce A a řádky B. Tvrzení o jádru si dokážeme později. $\square$

Geometrický náhled na maticové prostory

Geometrický náhled na maticové prostory

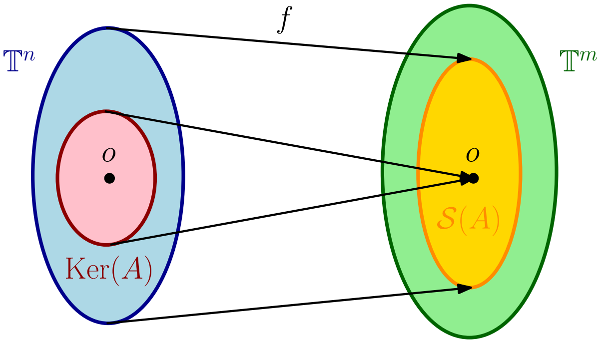
- Uvažme zobrazení $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^m$ dané předpisem $f(x) = Ax$.

Geometrický náhled na maticové prostory

- Uvažme zobrazení $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^m$ dané předpisem $f(x) = Ax$.
- Potom jádro $\mathrm{Ker}(A)$ je z definice tvořené vektory x s $f(x) = o$.

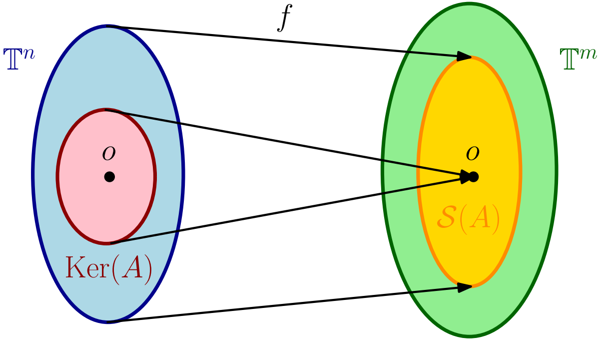
Geometrický náhled na maticové prostory

- Uvažme zobrazení $f\colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^m$ dané předpisem $f(x) = Ax$.
- Potom jádro $\mathrm{Ker}(A)$ je z definice tvořené vektory x s $f(x) = o$.
- Sloupcový prostor $\mathcal{S}(A)$ pak tvoří množinu všech obrazů přes f, neboli množinu $f(\mathbb{T}^n)$.



Geometrický náhled na maticové prostory

- Uvažme zobrazení $f\colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^m$ dané předpisem $f(x) = Ax$.
- Potom jádro $\mathrm{Ker}(A)$ je z definice tvořené vektory x s $f(x) = o$.
- Sloupcový prostor $\mathcal{S}(A)$ pak tvoří množinu všech obrazů přes f, neboli množinu $f(\mathbb{T}^n)$.



- Bude hrát roli později, až budeme probírat lineární zobrazení.

Řádkové prostory a násobení maticí zleva

Řádkové prostory a násobení maticí zleva

- Ukážeme, že po přenásobení maticí zleva dostaneme podprostor $\mathcal{R}(A)$.

Řádkové prostory a násobení maticí zleva

- Ukážeme, že po přenásobení maticí zleva dostaneme podprostor $\mathcal{R}(A)$. Dává smysl: řádek matice QA je lineární kombinací řádků matice A a vybranými lineárními kombinacemi vygenerujeme jen podprostor.

Řádkové prostory a násobení maticí zleva

- Ukážeme, že po přenásobení maticí zleva dostaneme podprostor $\mathcal{R}(A)$. Dává smysl: řádek matice QA je lineární kombinací řádků matice A a vybranými lineárními kombinacemi vygenerujeme jen podprostor.

Tvrzení 1

Pro matice $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$ a $Q \in \mathbb{T}^{p\times m}$ platí

Řádkové prostory a násobení maticí zleva

- Ukážeme, že po přenásobení maticí zleva dostaneme podprostor $\mathcal{R}(A)$. Dává smysl: řádek matice QA je lineární kombinací řádků matice A a vybranými lineárními kombinacemi vygenerujeme jen podprostor.

Tvrzení 1

Pro matice $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ a $Q \in \mathbb{T}^{p \times m}$ platí

1. $\mathcal{R}(QA)$ je podprostorem $\mathcal{R}(A)$ a

Řádkové prostory a násobení maticí zleva

- Ukážeme, že po přenásobení maticí zleva dostaneme podprostor $\mathcal{R}(A)$. Dává smysl: řádek matice QA je lineární kombinací řádků matice A a vybranými lineárními kombinacemi vygenerujeme jen podprostor.

Tvrzení 1

Pro matice $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ a $Q \in \mathbb{T}^{p \times m}$ platí

1. $\mathcal{R}(QA)$ je podprostorem $\mathcal{R}(A)$ a
2. platí-li $A_{*k} = \sum_{j \neq k} \alpha_j A_{*j}$ pro nějaké $k \in \{1, \ldots, \}$ a nějaká $\alpha_j \in \mathbb{T}$, pak $(QA)_{*k} = \sum_{j \neq k} \alpha_j (QA)_{*j}$.

Řádkové prostory a násobení maticí zleva

- Ukážeme, že po přenásobení maticí zleva dostaneme podprostor $\mathcal{R}(A)$. Dává smysl: řádek matice QA je lineární kombinací řádků matice A a vybranými lineárními kombinacemi vygenerujeme jen podprostor.

Tvrzení 1

Pro matice $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ a $Q \in \mathbb{T}^{p \times m}$ platí

1. $\mathcal{R}(QA)$ je podprostorem $\mathcal{R}(A)$ a
2. platí-li $A_{*k} = \sum_{j \neq k} \alpha_j A_{*j}$ pro nějaké $k \in \{1, \dots, \}$ a nějaká $\alpha_j \in \mathbb{T}$, pak $(QA)_{*k} = \sum_{j \neq k} \alpha_j (QA)_{*j}$.

- Důkaz:

Řádkové prostory a násobení maticí zleva

- Ukážeme, že po přenásobení maticí zleva dostaneme podprostor $\mathcal{R}(A)$. Dává smysl: řádek matice QA je lineární kombinací řádků matice A a vybranými lineárními kombinacemi vygenerujeme jen podprostor.

Tvrzení 1

Pro matice $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$ a $Q \in \mathbb{T}^{p\times m}$ platí

1. $\mathcal{R}(QA)$ je podprostorem $\mathcal{R}(A)$ a
2. platí-li $A_{*k} = \sum_{j\neq k} \alpha_j A_{*j}$ pro nějaké $k \in \{1, \ldots, \}$ a nějaká $\alpha_j \in \mathbb{T}$, pak $(QA)_{*k} = \sum_{j\neq k} \alpha_j (QA)_{*j}$.

- Důkaz:
  1. Protože už víme, že $\mathcal{R}(QA)$ je podprostorem prostoru $\mathbb{T}^n$, tak stačí ukázat $\mathcal{R}(QA) \subseteq \mathcal{R}(A)$.

Řádkové prostory a násobení maticí zleva

- Ukážeme, že po přenásobení maticí zleva dostaneme podprostor $\mathcal{R}(A)$. Dává smysl: řádek matice QA je lineární kombinací řádků matice A a vybranými lineárními kombinacemi vygenerujeme jen podprostor.

Tvrzení 1

Pro matice $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$ a $Q \in \mathbb{T}^{p\times m}$ platí

1. $\mathcal{R}(QA)$ je podprostorem $\mathcal{R}(A)$ a
2. platí-li $A_{*k} = \sum_{j\neq k} \alpha_j A_{*j}$ pro nějaké $k \in \{1,\ldots,\}$ a nějaká $\alpha_j \in \mathbb{T}$, pak $(QA)_{*k} = \sum_{j\neq k} \alpha_j (QA)_{*j}$.

- Důkaz:
  1. Protože už víme, že $\mathcal{R}(QA)$ je podprostorem prostoru $\mathbb{T}^n$, tak stačí ukázat $\mathcal{R}(QA) \subseteq \mathcal{R}(A)$. Pro každé $x \in \mathcal{R}(QA)$ existuje $y \in \mathbb{T}^p$ takové, že $x = (QA)^\top y$

Řádkové prostory a násobení maticí zleva

- Ukážeme, že po přenásobení maticí zleva dostaneme podprostor $\mathcal{R}(A)$. Dává smysl: řádek matice QA je lineární kombinací řádků matice A a vybranými lineárními kombinacemi vygenerujeme jen podprostor.

Tvrzení 1

Pro matice $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$ a $Q \in \mathbb{T}^{p\times m}$ platí

1. $\mathcal{R}(QA)$ je podprostorem $\mathcal{R}(A)$ a
2. platí-li $A_{*k} = \sum_{j\neq k} \alpha_j A_{*j}$ pro nějaké $k \in \{1,\ldots,\}$ a nějaká $\alpha_j \in \mathbb{T}$, pak $(QA)_{*k} = \sum_{j\neq k} \alpha_j (QA)_{*j}$.

- Důkaz:
  1. Protože už víme, že $\mathcal{R}(QA)$ je podprostorem prostoru $\mathbb{T}^n$, tak stačí ukázat $\mathcal{R}(QA) \subseteq \mathcal{R}(A)$. Pro každé $x \in \mathcal{R}(QA)$ existuje $y \in \mathbb{T}^p$ takové, že $x = (QA)^\top y = A^\top Q^\top y$

Řádkové prostory a násobení maticí zleva

- Ukážeme, že po přenásobení maticí zleva dostaneme podprostor $\mathcal{R}(A)$. Dává smysl: řádek matice QA je lineární kombinací řádků matice A a vybranými lineárními kombinacemi vygenerujeme jen podprostor.

Tvrzení 1

Pro matice $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ a $Q \in \mathbb{T}^{p \times m}$ platí

1. $\mathcal{R}(QA)$ je podprostorem $\mathcal{R}(A)$ a
2. platí-li $A_{*k} = \sum_{j \neq k} \alpha_j A_{*j}$ pro nějaké $k \in \{1, \ldots, \}$ a nějaká $\alpha_j \in \mathbb{T}$, pak $(QA)_{*k} = \sum_{j \neq k} \alpha_j (QA)_{*j}$.

- Důkaz:
  1. Protože už víme, že $\mathcal{R}(QA)$ je podprostorem prostoru $\mathbb{T}^n$, tak stačí ukázat $\mathcal{R}(QA) \subseteq \mathcal{R}(A)$. Pro každé $x \in \mathcal{R}(QA)$ existuje $y \in \mathbb{T}^p$ takové, že $x = (QA)^\top y = A^\top Q^\top y = A^\top (Q^\top y)$

Řádkové prostory a násobení maticí zleva

- Ukážeme, že po přenásobení maticí zleva dostaneme podprostor $\mathcal{R}(A)$. Dává smysl: řádek matice QA je lineární kombinací řádků matice A a vybranými lineárními kombinacemi vygenerujeme jen podprostor.

Tvrzení 1

Pro matice $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ a $Q \in \mathbb{T}^{p \times m}$ platí

1. $\mathcal{R}(QA)$ je podprostorem $\mathcal{R}(A)$ a
2. platí-li $A_{*k} = \sum_{j \neq k} \alpha_j A_{*j}$ pro nějaké $k \in \{1, \ldots, \}$ a nějaká $\alpha_j \in \mathbb{T}$, pak $(QA)_{*k} = \sum_{j \neq k} \alpha_j (QA)_{*j}$.

- Důkaz:
  1. Protože už víme, že $\mathcal{R}(QA)$ je podprostorem prostoru $\mathbb{T}^n$, tak stačí ukázat $\mathcal{R}(QA) \subseteq \mathcal{R}(A)$. Pro každé $x \in \mathcal{R}(QA)$ existuje $y \in \mathbb{T}^p$ takové, že $x = (QA)^\top y = A^\top Q^\top y = A^\top (Q^\top y) \in \mathcal{R}(A)$.

Řádkové prostory a násobení maticí zleva

- Ukážeme, že po přenásobení maticí zleva dostaneme podprostor $\mathcal{R}(A)$. Dává smysl: řádek matice QA je lineární kombinací řádků matice A a vybranými lineárními kombinacemi vygenerujeme jen podprostor.

Tvrzení 1

Pro matice $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$ a $Q \in \mathbb{T}^{p\times m}$ platí

1. $\mathcal{R}(QA)$ je podprostorem $\mathcal{R}(A)$ a
2. platí-li $A_{*k} = \sum_{j\neq k} \alpha_j A_{*j}$ pro nějaké $k \in \{1, \ldots, \}$ a nějaká $\alpha_j \in \mathbb{T}$, pak $(QA)_{*k} = \sum_{j\neq k} \alpha_j (QA)_{*j}$.

- Důkaz:
  1. Protože už víme, že $\mathcal{R}(QA)$ je podprostorem prostoru $\mathbb{T}^n$, tak stačí ukázat $\mathcal{R}(QA) \subseteq \mathcal{R}(A)$. Pro každé $x \in \mathcal{R}(QA)$ existuje $y \in \mathbb{T}^p$ takové, že $x = (QA)^\top y = A^\top Q^\top y = A^\top (Q^\top y) \in \mathcal{R}(A)$.
  2. Máme

$$(QA)_{*k} = QA_{*k}$$

Řádkové prostory a násobení maticí zleva

- Ukážeme, že po přenásobení maticí zleva dostaneme podprostor $\mathcal{R}(A)$. Dává smysl: řádek matice QA je lineární kombinací řádků matice A a vybranými lineárními kombinacemi vygenerujeme jen podprostor.

Tvrzení 1

Pro matice $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$ a $Q \in \mathbb{T}^{p\times m}$ platí

1. $\mathcal{R}(QA)$ je podprostorem $\mathcal{R}(A)$ a
2. platí-li $A_{*k} = \sum_{j\neq k} \alpha_j A_{*j}$ pro nějaké $k \in \{1, \dots, \}$ a nějaká $\alpha_j \in \mathbb{T}$, pak $(QA)_{*k} = \sum_{j\neq k} \alpha_j (QA)_{*j}$.

- Důkaz:
  1. Protože už víme, že $\mathcal{R}(QA)$ je podprostorem prostoru $\mathbb{T}^n$, tak stačí ukázat $\mathcal{R}(QA) \subseteq \mathcal{R}(A)$. Pro každé $x \in \mathcal{R}(QA)$ existuje $y \in \mathbb{T}^p$ takové, že $x = (QA)^\top y = A^\top Q^\top y = A^\top (Q^\top y) \in \mathcal{R}(A)$.
  2. Máme

$$(QA)_{*k} = QA_{*k} = Q\left(\sum_{j\neq k} \alpha_j A_{*j}\right)$$

Řádkové prostory a násobení maticí zleva

- Ukážeme, že po přenásobení maticí zleva dostaneme podprostor $\mathcal{R}(A)$. Dává smysl: řádek matice QA je lineární kombinací řádků matice A a vybranými lineárními kombinacemi vygenerujeme jen podprostor.

Tvrzení 1

Pro matice $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$ a $Q \in \mathbb{T}^{p\times m}$ platí

1. $\mathcal{R}(QA)$ je podprostorem $\mathcal{R}(A)$ a
2. platí-li $A_{*k} = \sum_{j\neq k} \alpha_j A_{*j}$ pro nějaké $k \in \{1, \ldots, \}$ a nějaká $\alpha_j \in \mathbb{T}$, pak $(QA)_{*k} = \sum_{j\neq k} \alpha_j (QA)_{*j}$.

- Důkaz:
  1. Protože už víme, že $\mathcal{R}(QA)$ je podprostorem prostoru $\mathbb{T}^n$, tak stačí ukázat $\mathcal{R}(QA) \subseteq \mathcal{R}(A)$. Pro každé $x \in \mathcal{R}(QA)$ existuje $y \in \mathbb{T}^p$ takové, že $x = (QA)^\top y = A^\top Q^\top y = A^\top (Q^\top y) \in \mathcal{R}(A)$.
  2. Máme

$$(QA)_{*k} = QA_{*k} = Q\left(\sum_{j\neq k} \alpha_j A_{*j}\right) = \sum_{j\neq k} \alpha_j QA_{*j}$$

Řádkové prostory a násobení maticí zleva

- Ukážeme, že po přenásobení maticí zleva dostaneme podprostor $\mathcal{R}(A)$. Dává smysl: řádek matice QA je lineární kombinací řádků matice A a vybranými lineárními kombinacemi vygenerujeme jen podprostor.

Tvrzení 1

Pro matice $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$ a $Q \in \mathbb{T}^{p\times m}$ platí

1. $\mathcal{R}(QA)$ je podprostorem $\mathcal{R}(A)$ a
2. platí-li $A_{*k} = \sum_{j\neq k} \alpha_j A_{*j}$ pro nějaké $k \in \{1, \dots, \}$ a nějaká $\alpha_j \in \mathbb{T}$, pak $(QA)_{*k} = \sum_{j\neq k} \alpha_j (QA)_{*j}$.

- Důkaz:
  1. Protože už víme, že $\mathcal{R}(QA)$ je podprostorem prostoru $\mathbb{T}^n$, tak stačí ukázat $\mathcal{R}(QA) \subseteq \mathcal{R}(A)$. Pro každé $x \in \mathcal{R}(QA)$ existuje $y \in \mathbb{T}^p$ takové, že $x = (QA)^\top y = A^\top Q^\top y = A^\top (Q^\top y) \in \mathcal{R}(A)$.
  2. Máme

$$(QA)_{*k} = QA_{*k} = Q\left(\sum_{j\neq k} \alpha_j A_{*j}\right) = \sum_{j\neq k} \alpha_j QA_{*j} = \sum_{j\neq k} \alpha_j (QA)_{*j}.$$

Jak je to se sloupcovými prostory při násobení maticí zleva?

Jak je to se sloupcovými prostory při násobení maticí zleva?

- Sloupcové podprostory porovnávat ve smyslu části 1) nelze, protože $\mathcal{S}(A) \Subset \mathbb{T}^m$, zatímco $\mathcal{S}(QA) \Subset \mathbb{T}^p$.

Jak je to se sloupcovými prostory při násobení maticí zleva?

- Sloupcové podprostory porovnávat ve smyslu části 1) nelze, protože $\mathcal{S}(A) \Subset \mathbb{T}^m$, zatímco $\mathcal{S}(QA) \Subset \mathbb{T}^p$.
- Nicméně podle části 2) je-li sloupec A_{*i} lineárně závislý na ostatních sloupcích matice A, pak je sloupec $(QA)_{*i}$ lineárně závislý na ostatních sloupcích matice QA se stejnými koeficienty.

Jak je to se sloupcovými prostory při násobení maticí zleva?

- Sloupcové podprostory porovnávat ve smyslu části 1) nelze, protože $\mathcal{S}(A) \Subset \mathbb{T}^m$, zatímco $\mathcal{S}(QA) \Subset \mathbb{T}^p$.
- Nicméně podle části 2) je-li sloupec A_{*i} lineárně závislý na ostatních sloupcích matice A, pak je sloupec $(QA)_{*i}$ lineárně závislý na ostatních sloupcích matice QA se stejnými koeficienty.
- Geometrický náhled: Lineární zobrazení $f : \mathbb{T}^m \to \mathbb{T}^p$ dané předpisem $f(x) = Qx$ zobrazuje sloupce matice A na sloupce matice QA, protože platí

$$QA = \begin{pmatrix} | & & | \\ QA_{1*} & \cdots & QA_{*n} \\ | & & | \end{pmatrix}.$$

Jak je to se sloupcovými prostory při násobení maticí zleva?

- Sloupcové podprostory porovnávat ve smyslu části 1) nelze, protože $\mathcal{S}(A) \Subset \mathbb{T}^m$, zatímco $\mathcal{S}(QA) \Subset \mathbb{T}^p$.
- Nicméně podle části 2) je-li sloupec A_{*i} lineárně závislý na ostatních sloupcích matice A, pak je sloupec $(QA)_{*i}$ lineárně závislý na ostatních sloupcích matice QA se stejnými koeficienty.
- Geometrický náhled: Lineární zobrazení $f : \mathbb{T}^m \to \mathbb{T}^p$ dané předpisem $f(x) = Qx$ zobrazuje sloupce matice A na sloupce matice QA, protože platí

$$QA = \begin{pmatrix} | & & | \\ QA_{1*} & \cdots & QA_{*n} \\ | & & | \end{pmatrix}.$$

  Tudíž f se aplikuje na všechny sloupce matice A a proto závislosti mezi sloupci zůstanou zachovány i pro výslednou matici QA.

Příklady násobení maticí zleva u sloupcových prostorů

Příklady násobení maticí zleva u sloupcových prostorů

- Příklad 1: druhý sloupec matice A je dvojnásobkem prvního a stejně je tomu v matici QA:

$$QA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Příklady násobení maticí zleva u sloupcových prostorů

- Příklad 1: druhý sloupec matice A je dvojnásobkem prvního a stejně je tomu v matici QA:

$$QA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

- Příklad 2: třetí sloupec matice A' je součtem prvních dvou a stejně je tomu v matici QA':

$$QA' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Řádkové prostory a násobení regulární maticí zleva

Řádkové prostory a násobení regulární maticí zleva

- Pokud násobíme regulární maticí, pak dostaneme silnější verzi Tvrzení 1.

Řádkové prostory a násobení regulární maticí zleva

- Pokud násobíme regulární maticí, pak dostaneme silnější verzi Tvrzení 1. Jako důsledek se po přenásobení regulární maticí zachovává také lineární nezávislost.

Řádkové prostory a násobení regulární maticí zleva

- Pokud násobíme regulární maticí, pak dostaneme silnější verzi Tvrzení 1. Jako důsledek se po přenásobení regulární maticí zachovává také lineární nezávislost.

Tvrzení 2

Pro matici $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ a regulární matici $Q \in \mathbb{T}^{m \times m}$ platí

Řádkové prostory a násobení regulární maticí zleva

- Pokud násobíme regulární maticí, pak dostaneme silnější verzi Tvrzení 1. Jako důsledek se po přenásobení regulární maticí zachovává také lineární nezávislost.

Tvrzení 2

Pro matici $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ a regulární matici $Q \in \mathbb{T}^{m \times m}$ platí

1. $\mathcal{R}(QA) = \mathcal{R}(A)$ a

Řádkové prostory a násobení regulární maticí zleva

- Pokud násobíme regulární maticí, pak dostaneme silnější verzi Tvrzení 1. Jako důsledek se po přenásobení regulární maticí zachovává také lineární nezávislost.

Tvrzení 2

Pro matici $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ a regulární matici $Q \in \mathbb{T}^{m \times m}$ platí

1. $\mathcal{R}(QA) = \mathcal{R}(A)$ a
2. rovnost $A_{*k} = \sum_{j \neq k} \alpha_j A_{*j}$ pro nějaká $k \in \{1, \ldots, \}$ a nějaká $\alpha_j \in \mathbb{T}$ platí právě tehdy, když platí $(QA)_{*k} = \sum_{j \neq k} \alpha_j (QA)_{*j}$.

Řádkové prostory a násobení regulární maticí zleva

- Pokud násobíme regulární maticí, pak dostaneme silnější verzi Tvrzení 1. Jako důsledek se po přenásobení regulární maticí zachovává také lineární nezávislost.

Tvrzení 2

Pro matici $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ a regulární matici $Q \in \mathbb{T}^{m \times m}$ platí

1. $\mathcal{R}(QA) = \mathcal{R}(A)$ a
2. rovnost $A_{*k} = \sum_{j \neq k} \alpha_j A_{*j}$ pro nějaká $k \in \{1, \ldots, \}$ a nějaká $\alpha_j \in \mathbb{T}$ platí právě tehdy, když platí $(QA)_{*k} = \sum_{j \neq k} \alpha_j (QA)_{*j}$.

- Důkaz:

Řádkové prostory a násobení regulární maticí zleva

- Pokud násobíme regulární maticí, pak dostaneme silnější verzi Tvrzení 1. Jako důsledek se po přenásobení regulární maticí zachovává také lineární nezávislost.

Tvrzení 2

Pro matici $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$ a regulární matici $Q \in \mathbb{T}^{m\times m}$ platí

1. $\mathcal{R}(QA) = \mathcal{R}(A)$ a
2. rovnost $A_{*k} = \sum_{j\neq k} \alpha_j A_{*j}$ pro nějaká $k \in \{1,\ldots,\}$ a nějaká $\alpha_j \in \mathbb{T}$ platí právě tehdy, když platí $(QA)_{*k} = \sum_{j\neq k} \alpha_j (QA)_{*j}$.

- Důkaz:
  1. Z Tvrzení 1 víme, že $\mathcal{R}(QA) \subseteq \mathcal{R}(A)$.

Řádkové prostory a násobení regulární maticí zleva

- Pokud násobíme regulární maticí, pak dostaneme silnější verzi Tvrzení 1. Jako důsledek se po přenásobení regulární maticí zachovává také lineární nezávislost.

Tvrzení 2

Pro matici $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ a regulární matici $Q \in \mathbb{T}^{m \times m}$ platí

1. $\mathcal{R}(QA) = \mathcal{R}(A)$ a
2. rovnost $A_{*k} = \sum_{j \neq k} \alpha_j A_{*j}$ pro nějaká $k \in \{1, \ldots, \}$ a nějaká $\alpha_j \in \mathbb{T}$ platí právě tehdy, když platí $(QA)_{*k} = \sum_{j \neq k} \alpha_j (QA)_{*j}$.

- Důkaz:
  1. Z Tvrzení 1 víme, že $\mathcal{R}(QA) \subseteq \mathcal{R}(A)$. Aplikujeme-li Tvrzení 1 ještě na matici QA násobenou zleva maticí Q^{-1}, tak dostaneme $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(Q^{-1}QA) \subseteq \mathcal{R}(QA)$.

Řádkové prostory a násobení regulární maticí zleva

- Pokud násobíme regulární maticí, pak dostaneme silnější verzi Tvrzení 1. Jako důsledek se po přenásobení regulární maticí zachovává také lineární nezávislost.

Tvrzení 2

Pro matici $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ a regulární matici $Q \in \mathbb{T}^{m \times m}$ platí

1. $\mathcal{R}(QA) = \mathcal{R}(A)$ a
2. rovnost $A_{*k} = \sum_{j \neq k} \alpha_j A_{*j}$ pro nějaká $k \in \{1, \dots, \}$ a nějaká $\alpha_j \in \mathbb{T}$ platí právě tehdy, když platí $(QA)_{*k} = \sum_{j \neq k} \alpha_j (QA)_{*j}$.

- Důkaz:
  1. Z Tvrzení 1 víme, že $\mathcal{R}(QA) \subseteq \mathcal{R}(A)$. Aplikujeme-li Tvrzení 1 ještě na matici QA násobenou zleva maticí Q^{-1}, tak dostaneme $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(Q^{-1}QA) \subseteq \mathcal{R}(QA)$. Tedy $\mathcal{R}(QA) = \mathcal{R}(A)$.

Řádkové prostory a násobení regulární maticí zleva

- Pokud násobíme regulární maticí, pak dostaneme silnější verzi Tvrzení 1. Jako důsledek se po přenásobení regulární maticí zachovává také lineární nezávislost.

Tvrzení 2

Pro matici $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$ a regulární matici $Q \in \mathbb{T}^{m\times m}$ platí

1. $\mathcal{R}(QA) = \mathcal{R}(A)$ a
2. rovnost $A_{*k} = \sum_{j\neq k} \alpha_j A_{*j}$ pro nějaká $k \in \{1,\ldots,\}$ a nějaká $\alpha_j \in \mathbb{T}$ platí právě tehdy, když platí $(QA)_{*k} = \sum_{j\neq k} \alpha_j (QA)_{*j}$.

- Důkaz:
  1. Z Tvrzení 1 víme, že $\mathcal{R}(QA) \subseteq \mathcal{R}(A)$. Aplikujeme-li Tvrzení 1 ještě na matici QA násobenou zleva maticí Q^{-1}, tak dostaneme $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(Q^{-1}QA) \subseteq \mathcal{R}(QA)$. Tedy $\mathcal{R}(QA) = \mathcal{R}(A)$.
  2. Implikaci zleva doprava máme z Tvrzení 1.

Řádkové prostory a násobení regulární maticí zleva

- Pokud násobíme regulární maticí, pak dostaneme silnější verzi Tvrzení 1. Jako důsledek se po přenásobení regulární maticí zachovává také lineární nezávislost.

Tvrzení 2

Pro matici $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ a regulární matici $Q \in \mathbb{T}^{m \times m}$ platí

1. $\mathcal{R}(QA) = \mathcal{R}(A)$ a
2. rovnost $A_{*k} = \sum_{j \neq k} \alpha_j A_{*j}$ pro nějaká $k \in \{1, \dots, \}$ a nějaká $\alpha_j \in \mathbb{T}$ platí právě tehdy, když platí $(QA)_{*k} = \sum_{j \neq k} \alpha_j (QA)_{*j}$.

- Důkaz:
  1. Z Tvrzení 1 víme, že $\mathcal{R}(QA) \subseteq \mathcal{R}(A)$. Aplikujeme-li Tvrzení 1 ještě na matici QA násobenou zleva maticí Q^{-1}, tak dostaneme $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(Q^{-1}QA) \subseteq \mathcal{R}(QA)$. Tedy $\mathcal{R}(QA) = \mathcal{R}(A)$.
  2. Implikaci zleva doprava máme z Tvrzení 1. Druhou implikaci dostaneme z Tvrzení 1 použitého na matici QA vynásobenou zleva maticí Q^{-1}.

Řádkové prostory a násobení regulární maticí zleva

- Pokud násobíme regulární maticí, pak dostaneme silnější verzi Tvrzení 1. Jako důsledek se po přenásobení regulární maticí zachovává také lineární nezávislost.

Tvrzení 2

Pro matici $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$ a regulární matici $Q \in \mathbb{T}^{m\times m}$ platí

1. $\mathcal{R}(QA) = \mathcal{R}(A)$ a
2. rovnost $A_{*k} = \sum_{j\neq k} \alpha_j A_{*j}$ pro nějaká $k \in \{1, \dots, \}$ a nějaká $\alpha_j \in \mathbb{T}$ platí právě tehdy, když platí $(QA)_{*k} = \sum_{j\neq k} \alpha_j (QA)_{*j}$.

- Důkaz:
    1. Z Tvrzení 1 víme, že $\mathcal{R}(QA) \subseteq \mathcal{R}(A)$. Aplikujeme-li Tvrzení 1 ještě na matici QA násobenou zleva maticí Q^{-1}, tak dostaneme $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(Q^{-1}QA) \subseteq \mathcal{R}(QA)$. Tedy $\mathcal{R}(QA) = \mathcal{R}(A)$.
    2. Implikaci zleva doprava máme z Tvrzení 1. Druhou implikaci dostaneme z Tvrzení 1 použitého na matici QA vynásobenou zleva maticí Q^{-1}. $\square$

Maticové prostory a RREF

Maticové prostory a RREF

Věta 1

Pro matici $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ a její RREF tvar A^R s pivoty na pozicích $(1, p_1), \ldots, (r, p_r)$, kde $r = \operatorname{rank}(A)$, platí

Maticové prostory a RREF

Věta 1

Pro matici $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ a její RREF tvar A^R s pivoty na pozicích $(1, p_1), \ldots, (r, p_r)$, kde $r = \mathrm{rank}(A)$, platí

1. nenulové řádky matice A^R (tedy vektory $A^R_{1*}, \ldots, A^R_{r*}$) tvoří bázi $\mathcal{R}(A)$,

Maticové prostory a RREF

Věta 1

Pro matici $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ a její RREF tvar A^R s pivoty na pozicích $(1, p_1), \ldots, (r, p_r)$, kde $r = \mathrm{rank}(A)$, platí

1. nenulové řádky matice A^R (tedy vektory $A^R_{1*}, \ldots, A^R_{r*}$) tvoří bázi $\mathcal{R}(A)$,
2. sloupce $A_{*p_1}, \ldots, A_{*p_r}$ tvoří bázi $\mathcal{S}(A)$ a

Maticové prostory a RREF

Věta 1

Pro matici $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ a její RREF tvar A^R s pivoty na pozicích $(1, p_1), \ldots, (r, p_r)$, kde $r = \operatorname{rank}(A)$, platí

1. nenulové řádky matice A^R (tedy vektory $A^R_{1*}, \ldots, A^R_{r*}$) tvoří bázi $\mathcal{R}(A)$,
2. sloupce $A_{*p_1}, \ldots, A_{*p_r}$ tvoří bázi $\mathcal{S}(A)$ a
3. $\dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{S}(A) = r$.

Maticové prostory a RREF

Věta 1

Pro matici $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ a její RREF tvar A^R s pivoty na pozicích $(1, p_1), \ldots, (r, p_r)$, kde $r = \operatorname{rank}(A)$, platí

1. nenulové řádky matice A^R (tedy vektory $A^R_{1*}, \ldots, A^R_{r*}$) tvoří bázi $\mathcal{R}(A)$,
2. sloupce $A_{*p_1}, \ldots, A_{*p_r}$ tvoří bázi $\mathcal{S}(A)$ a
3. $\dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{S}(A) = r$.

- Důkaz:

Maticové prostory a RREF

Věta 1

Pro matici $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$ a její RREF tvar A^R s pivoty na pozicích $(1, p_1), \ldots, (r, p_r)$, kde $r = \mathrm{rank}(A)$, platí

1. nenulové řádky matice A^R (tedy vektory $A^R_{1*}, \ldots, A^R_{r*}$) tvoří bázi $\mathcal{R}(A)$,
2. sloupce $A_{*p_1}, \ldots, A_{*p_r}$ tvoří bázi $\mathcal{S}(A)$ a
3. $\dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{S}(A) = r$.

- Důkaz: Již víme, že existuje regulární $Q \in \mathbb{T}^{m\times m}$ taková, že $A^R = QA$.

Maticové prostory a RREF

Věta 1

Pro matici $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$ a její RREF tvar A^R s pivoty na pozicích $(1, p_1), \ldots, (r, p_r)$, kde $r = \operatorname{rank}(A)$, platí

1. nenulové řádky matice A^R (tedy vektory $A^R_{1*}, \ldots, A^R_{r*}$) tvoří bázi $\mathcal{R}(A)$,
2. sloupce $A_{*p_1}, \ldots, A_{*p_r}$ tvoří bázi $\mathcal{S}(A)$ a
3. $\dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{S}(A) = r$.

- Důkaz: Již víme, že existuje regulární $Q \in \mathbb{T}^{m\times m}$ taková, že $A^R = QA$.
  1. Podle Tvrzení 2 je $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(QA) = \mathcal{R}(A^R)$.

Maticové prostory a RREF

Věta 1

Pro matici $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$ a její RREF tvar A^R s pivoty na pozicích $(1, p_1), \ldots, (r, p_r)$, kde $r = \operatorname{rank}(A)$, platí

1. nenulové řádky matice A^R (tedy vektory $A^R_{1*}, \ldots, A^R_{r*}$) tvoří bázi $\mathcal{R}(A)$,
2. sloupce $A_{*p_1}, \ldots, A_{*p_r}$ tvoří bázi $\mathcal{S}(A)$ a
3. $\dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{S}(A) = r$.

- Důkaz: Již víme, že existuje regulární $Q \in \mathbb{T}^{m\times m}$ taková, že $A^R = QA$.
  1. Podle Tvrzení 2 je $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(QA) = \mathcal{R}(A^R)$. Nenulové řádky A^R jsou lineárně nezávislé a tvoří tak bázi $\mathcal{R}(A^R)$

Maticové prostory a RREF

Věta 1

Pro matici $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$ a její RREF tvar A^R s pivoty na pozicích $(1, p_1), \ldots, (r, p_r)$, kde $r = \operatorname{rank}(A)$, platí

1. nenulové řádky matice A^R (tedy vektory $A^R_{1*}, \ldots, A^R_{r*}$) tvoří bázi $\mathcal{R}(A)$,
2. sloupce $A_{*p_1}, \ldots, A_{*p_r}$ tvoří bázi $\mathcal{S}(A)$ a
3. $\dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{S}(A) = r$.

- Důkaz: Již víme, že existuje regulární $Q \in \mathbb{T}^{m\times m}$ taková, že $A^R = QA$.
  1. Podle Tvrzení 2 je $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(QA) = \mathcal{R}(A^R)$. Nenulové řádky A^R jsou lineárně nezávislé a tvoří tak bázi $\mathcal{R}(A^R)$ a tedy také $\mathcal{R}(A)$.

Maticové prostory a RREF

Věta 1

Pro matici $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$ a její RREF tvar A^R s pivoty na pozicích $(1, p_1), \ldots, (r, p_r)$, kde $r = \operatorname{rank}(A)$, platí

1. nenulové řádky matice A^R (tedy vektory $A^R_{1*}, \ldots, A^R_{r*}$) tvoří bázi $\mathcal{R}(A)$,
2. sloupce $A_{*p_1}, \ldots, A_{*p_r}$ tvoří bázi $\mathcal{S}(A)$ a
3. $\dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{S}(A) = r$.

- Důkaz: Již víme, že existuje regulární $Q \in \mathbb{T}^{m\times m}$ taková, že $A^R = QA$.
  1. Podle Tvrzení 2 je $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(QA) = \mathcal{R}(A^R)$. Nenulové řádky A^R jsou lineárně nezávislé a tvoří tak bázi $\mathcal{R}(A^R)$ a tedy také $\mathcal{R}(A)$.
  2. Sloupce $A^R_{*p_1}, \ldots, A^R_{*p_r}$ jsou lineárně nezávislé a generují $\mathcal{S}(A^R)$:

Maticové prostory a RREF

Věta 1

Pro matici $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$ a její RREF tvar A^R s pivoty na pozicích $(1, p_1), \ldots, (r, p_r)$, kde $r = \operatorname{rank}(A)$, platí

1. nenulové řádky matice A^R (tedy vektory $A^R_{1*}, \ldots, A^R_{r*}$) tvoří bázi $\mathcal{R}(A)$,
2. sloupce $A_{*p_1}, \ldots, A_{*p_r}$ tvoří bázi $\mathcal{S}(A)$ a
3. $\dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{S}(A) = r$.

- Důkaz: Již víme, že existuje regulární $Q \in \mathbb{T}^{m\times m}$ taková, že $A^R = QA$.
  1. Podle Tvrzení 2 je $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(QA) = \mathcal{R}(A^R)$. Nenulové řádky A^R jsou lineárně nezávislé a tvoří tak bázi $\mathcal{R}(A^R)$ a tedy také $\mathcal{R}(A)$.
  2. Sloupce $A^R_{*p_1}, \ldots, A^R_{*p_r}$ jsou lineárně nezávislé a generují $\mathcal{S}(A^R)$:

$$A^R_{*j} = \sum_{i=1}^{m} a^R_{ij} e_i$$

Maticové prostory a RREF

Věta 1

Pro matici $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$ a její RREF tvar A^R s pivoty na pozicích $(1, p_1), \ldots, (r, p_r)$, kde $r = \operatorname{rank}(A)$, platí

1. nenulové řádky matice A^R (tedy vektory $A^R_{1*}, \ldots, A^R_{r*}$) tvoří bázi $\mathcal{R}(A)$,
2. sloupce $A_{*p_1}, \ldots, A_{*p_r}$ tvoří bázi $\mathcal{S}(A)$ a
3. $\dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{S}(A) = r$.

- Důkaz: Již víme, že existuje regulární $Q \in \mathbb{T}^{m\times m}$ taková, že $A^R = QA$.
  1. Podle Tvrzení 2 je $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(QA) = \mathcal{R}(A^R)$. Nenulové řádky A^R jsou lineárně nezávislé a tvoří tak bázi $\mathcal{R}(A^R)$ a tedy také $\mathcal{R}(A)$.
  2. Sloupce $A^R_{*p_1}, \ldots, A^R_{*p_r}$ jsou lineárně nezávislé a generují $\mathcal{S}(A^R)$:

$$A^R_{*j} = \sum_{i=1}^{m} a^R_{ij} e_i = \sum_{i=1}^{r} a^R_{ij} e_i$$

Maticové prostory a RREF

Věta 1

Pro matici $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$ a její RREF tvar A^R s pivoty na pozicích $(1, p_1), \ldots, (r, p_r)$, kde $r = \operatorname{rank}(A)$, platí

1. nenulové řádky matice A^R (tedy vektory $A^R_{1*}, \ldots, A^R_{r*}$) tvoří bázi $\mathcal{R}(A)$,
2. sloupce $A_{*p_1}, \ldots, A_{*p_r}$ tvoří bázi $\mathcal{S}(A)$ a
3. $\dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{S}(A) = r$.

- Důkaz: Již víme, že existuje regulární $Q \in \mathbb{T}^{m\times m}$ taková, že $A^R = QA$.
  1. Podle Tvrzení 2 je $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(QA) = \mathcal{R}(A^R)$. Nenulové řádky A^R jsou lineárně nezávislé a tvoří tak bázi $\mathcal{R}(A^R)$ a tedy také $\mathcal{R}(A)$.
  2. Sloupce $A^R_{*p_1}, \ldots, A^R_{*p_r}$ jsou lineárně nezávislé a generují $\mathcal{S}(A^R)$:

$$A^R_{*j} = \sum_{i=1}^{m} a^R_{ij} e_i = \sum_{i=1}^{r} a^R_{ij} e_i = \sum_{i=1}^{r} a^R_{ij} A^R_{*p_i}.$$

Maticové prostory a RREF

Věta 1

Pro matici $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ a její RREF tvar A^R s pivoty na pozicích $(1, p_1), \ldots, (r, p_r)$, kde $r = \operatorname{rank}(A)$, platí

1. nenulové řádky matice A^R (tedy vektory $A^R_{1*}, \ldots, A^R_{r*}$) tvoří bázi $\mathcal{R}(A)$,
2. sloupce $A_{*p_1}, \ldots, A_{*p_r}$ tvoří bázi $\mathcal{S}(A)$ a
3. $\dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{S}(A) = r$.

- **Důkaz**: Již víme, že existuje regulární $Q \in \mathbb{T}^{m \times m}$ taková, že $A^R = QA$.
  1. Podle Tvrzení 2 je $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(QA) = \mathcal{R}(A^R)$. Nenulové řádky A^R jsou lineárně nezávislé a tvoří tak bázi $\mathcal{R}(A^R)$ a tedy také $\mathcal{R}(A)$.
  2. Sloupce $A^R_{*p_1}, \ldots, A^R_{*p_r}$ jsou lineárně nezávislé a generují $\mathcal{S}(A^R)$:

$$A^R_{*j} = \sum_{i=1}^{m} a^R_{ij} e_i = \sum_{i=1}^{r} a^R_{ij} e_i = \sum_{i=1}^{r} a^R_{ij} A^R_{*p_i}.$$

Tvoří tak bázi $\mathcal{S}(A^R)$.

Maticové prostory a RREF

Věta 1

Pro matici $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$ a její RREF tvar A^R s pivoty na pozicích $(1, p_1), \ldots, (r, p_r)$, kde $r = \operatorname{rank}(A)$, platí

1. nenulové řádky matice A^R (tedy vektory $A^R_{1*}, \ldots, A^R_{r*}$) tvoří bázi $\mathcal{R}(A)$,
2. sloupce $A_{*p_1}, \ldots, A_{*p_r}$ tvoří bázi $\mathcal{S}(A)$ a
3. $\dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{S}(A) = r$.

- Důkaz: Již víme, že existuje regulární $Q \in \mathbb{T}^{m\times m}$ taková, že $A^R = QA$.
  1. Podle Tvrzení 2 je $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(QA) = \mathcal{R}(A^R)$. Nenulové řádky A^R jsou lineárně nezávislé a tvoří tak bázi $\mathcal{R}(A^R)$ a tedy také $\mathcal{R}(A)$.
  2. Sloupce $A^R_{*p_1}, \ldots, A^R_{*p_r}$ jsou lineárně nezávislé a generují $\mathcal{S}(A^R)$:

$$A^R_{*j} = \sum_{i=1}^{m} a^R_{ij} e_i = \sum_{i=1}^{r} a^R_{ij} e_i = \sum_{i=1}^{r} a^R_{ij} A^R_{*p_i}.$$

  Tvoří tak bázi $\mathcal{S}(A^R)$. Z Tvrzení 2 pak $A_{*p_1}, \ldots, A_{*p_r}$ je bází $\mathcal{S}(A)$.

Maticové prostory a RREF

Věta 1

Pro matici $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$ a její RREF tvar A^R s pivoty na pozicích $(1, p_1), \dots, (r, p_r)$, kde $r = \operatorname{rank}(A)$, platí

1. nenulové řádky matice A^R (tedy vektory $A^R_{1*}, \dots, A^R_{r*}$) tvoří bázi $\mathcal{R}(A)$,
2. sloupce $A_{*p_1}, \dots, A_{*p_r}$ tvoří bázi $\mathcal{S}(A)$ a
3. $\dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{S}(A) = r$.

- Důkaz: Již víme, že existuje regulární $Q \in \mathbb{T}^{m\times m}$ taková, že $A^R = QA$.
  1. Podle Tvrzení 2 je $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(QA) = \mathcal{R}(A^R)$. Nenulové řádky A^R jsou lineárně nezávislé a tvoří tak bázi $\mathcal{R}(A^R)$ a tedy také $\mathcal{R}(A)$.
  2. Sloupce $A^R_{*p_1}, \dots, A^R_{*p_r}$ jsou lineárně nezávislé a generují $\mathcal{S}(A^R)$:
  $$A^R_{*j} = \sum_{i=1}^{m} a^R_{ij} e_i = \sum_{i=1}^{r} a^R_{ij} e_i = \sum_{i=1}^{r} a^R_{ij} A^R_{*p_i}.$$
  Tvoří tak bázi $\mathcal{S}(A^R)$. Z Tvrzení 2 pak $A_{*p_1}, \dots, A_{*p_r}$ je bází $\mathcal{S}(A)$.
  3. $\dim \mathcal{R}(A)$ je velikostí báze $\mathcal{R}(A)$, tedy r podle 1).

Maticové prostory a RREF

Věta 1

Pro matici $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ a její RREF tvar A^R s pivoty na pozicích $(1, p_1), \ldots, (r, p_r)$, kde $r = \operatorname{rank}(A)$, platí

1. nenulové řádky matice A^R (tedy vektory $A^R_{1*}, \ldots, A^R_{r*}$) tvoří bázi $\mathcal{R}(A)$,
2. sloupce $A_{*p_1}, \ldots, A_{*p_r}$ tvoří bázi $\mathcal{S}(A)$ a
3. $\dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{S}(A) = r$.

- Důkaz: Již víme, že existuje regulární $Q \in \mathbb{T}^{m \times m}$ taková, že $A^R = QA$.
  1. Podle Tvrzení 2 je $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(QA) = \mathcal{R}(A^R)$. Nenulové řádky A^R jsou lineárně nezávislé a tvoří tak bázi $\mathcal{R}(A^R)$ a tedy také $\mathcal{R}(A)$.
  2. Sloupce $A^R_{*p_1}, \ldots, A^R_{*p_r}$ jsou lineárně nezávislé a generují $\mathcal{S}(A^R)$:
  $$A^R_{*j} = \sum_{i=1}^{m} a^R_{ij} e_i = \sum_{i=1}^{r} a^R_{ij} e_i = \sum_{i=1}^{r} a^R_{ij} A^R_{*p_i}.$$
  Tvoří tak bázi $\mathcal{S}(A^R)$. Z Tvrzení 2 pak $A_{*p_1}, \ldots, A_{*p_r}$ je bází $\mathcal{S}(A)$.
  3. $\dim \mathcal{R}(A)$ je velikostí báze $\mathcal{R}(A)$, tedy r podle 1). Podobně 2) dá $\dim \mathcal{S}(A) = r$.

Maticové prostory a RREF

Věta 1

Pro matici $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$ a její RREF tvar A^R s pivoty na pozicích $(1, p_1), \ldots, (r, p_r)$, kde $r = \operatorname{rank}(A)$, platí

1. nenulové řádky matice A^R (tedy vektory $A^R_{1*}, \ldots, A^R_{r*}$) tvoří bázi $\mathcal{R}(A)$,
2. sloupce $A_{*p_1}, \ldots, A_{*p_r}$ tvoří bázi $\mathcal{S}(A)$ a
3. $\dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{S}(A) = r$.

- Důkaz: Již víme, že existuje regulární $Q \in \mathbb{T}^{m\times m}$ taková, že $A^R = QA$.
  1. Podle Tvrzení 2 je $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(QA) = \mathcal{R}(A^R)$. Nenulové řádky A^R jsou lineárně nezávislé a tvoří tak bázi $\mathcal{R}(A^R)$ a tedy také $\mathcal{R}(A)$.
  2. Sloupce $A^R_{*p_1}, \ldots, A^R_{*p_r}$ jsou lineárně nezávislé a generují $\mathcal{S}(A^R)$:
  $$A^R_{*j} = \sum_{i=1}^{m} a^R_{ij} e_i = \sum_{i=1}^{r} a^R_{ij} e_i = \sum_{i=1}^{r} a^R_{ij} A^R_{*p_i}.$$
  Tvoří tak bázi $\mathcal{S}(A^R)$. Z Tvrzení 2 pak $A_{*p_1}, \ldots, A_{*p_r}$ je bází $\mathcal{S}(A)$.
  3. $\dim \mathcal{R}(A)$ je velikostí báze $\mathcal{R}(A)$, tedy r podle 1). Podobně 2) dá $\dim \mathcal{S}(A) = r$. □

Důsledky o hodnosti matice

Důsledky o hodnosti matice

- Třetí část Věty 1 nám říká, že

$$\operatorname{rank}(A) = \dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{S}(A)$$

Důsledky o hodnosti matice

- Třetí část Věty 1 nám říká, že

$$\operatorname{rank}(A) = \dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{S}(A) = \dim \mathcal{R}(A^\top) = \operatorname{rank}(A^\top).$$

Důsledky o hodnosti matice

- Třetí část Věty 1 nám říká, že

$$\operatorname{rank}(A) = \dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{S}(A) = \dim \mathcal{R}(A^\top) = \operatorname{rank}(A^\top).$$

Důsledek

Pro každou matici $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ platí $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^\top)$.

Důsledky o hodnosti matice

- Třetí část Věty 1 nám říká, že

$$\mathrm{rank}(A) = \dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{S}(A) = \dim \mathcal{R}(A^\top) = \mathrm{rank}(A^\top).$$

Důsledek

Pro každou matici $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ platí $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^\top)$.

- Poznámka o řešitelnosti soustav rovnic:

Důsledky o hodnosti matice

- Třetí část Věty 1 nám říká, že

$$\mathrm{rank}(A) = \dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{S}(A) = \dim \mathcal{R}(A^\top) = \mathrm{rank}(A^\top).$$

Důsledek

Pro každou matici $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ platí $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^\top)$.

- Poznámka o řešitelnosti soustav rovnic: Soustava rovnic $Ax = b$ je řešitelná právě tehdy, když b je lineární kombinací sloupců matice A.

Důsledky o hodnosti matice

- Třetí část Věty 1 nám říká, že

$$\operatorname{rank}(A) = \dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{S}(A) = \dim \mathcal{R}(A^\top) = \operatorname{rank}(A^\top).$$

Důsledek

Pro každou matici $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ platí $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^\top)$.

- Poznámka o řešitelnosti soustav rovnic: Soustava rovnic $Ax = b$ je řešitelná právě tehdy, když b je lineární kombinací sloupců matice A. Neboli $b \in \mathcal{S}(A)$. Což nastává právě tehdy, když $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(A \mid b)$.

Důsledky o hodnosti matice

- Třetí část Věty 1 nám říká, že

$$\operatorname{rank}(A) = \dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{S}(A) = \dim \mathcal{R}(A^\top) = \operatorname{rank}(A^\top).$$

Důsledek

Pro každou matici $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ platí $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^\top)$.

- Poznámka o řešitelnosti soustav rovnic: Soustava rovnic $Ax = b$ je řešitelná právě tehdy, když b je lineární kombinací sloupců matice A. Neboli $b \in \mathcal{S}(A)$. Což nastává právě tehdy, když $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(A \mid b)$. Věta 1 nám pak přímo dává Frobeniovu větu.

Důsledky o hodnosti matice

- Třetí část Věty 1 nám říká, že

$$\operatorname{rank}(A) = \dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{S}(A) = \dim \mathcal{R}(A^\top) = \operatorname{rank}(A^\top).$$

Důsledek

Pro každou matici $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$ platí $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^\top)$.

- Poznámka o řešitelnosti soustav rovnic: Soustava rovnic $Ax = b$ je řešitelná právě tehdy, když b je lineární kombinací sloupců matice A. Neboli $b \in \mathcal{S}(A)$. Což nastává právě tehdy, když $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(A \mid b)$. Věta 1 nám pak přímo dává Frobeniovu větu.

Frobeniova věta

Soustava $(A \mid b)$ má aspoň jedno řešení právě tehdy, když

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A \mid b).$$

O dimenzi jádra a hodnosti matice

O dimenzi jádra a hodnosti matice

Věta 2

Pro každou matici $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ platí $\dim \mathrm{Ker}(A) + \mathrm{rank}(A) = n$.

O dimenzi jádra a hodnosti matice

Věta 2

Pro každou matici $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ platí $\dim \mathrm{Ker}(A) + \mathrm{rank}(A) = n$.

- Důkaz:

O dimenzi jádra a hodnosti matice

Věta 2

Pro každou matici $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ platí $\dim \mathrm{Ker}(A) + \mathrm{rank}(A) = n$.

- Důkaz: Pro $k = \dim \mathrm{Ker}(A)$ uvažme bázi $v_1, \ldots, v_k$ jádra $\mathrm{Ker}(A)$.

O dimenzi jádra a hodnosti matice

Věta 2

Pro každou matici $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ platí $\dim \mathrm{Ker}(A) + \mathrm{rank}(A) = n$.

- Důkaz: Pro $k = \dim \mathrm{Ker}(A)$ uvažme bázi $v_1, \ldots, v_k$ jádra $\mathrm{Ker}(A)$.
- Podle Věty o rozšíření na bázi lze získat bázi $v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n$ prostoru $\mathbb{T}^n$.

O dimenzi jádra a hodnosti matice

Věta 2

Pro každou matici $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$ platí $\dim \mathrm{Ker}(A) + \mathrm{rank}(A) = n$.

- Důkaz: Pro $k = \dim \mathrm{Ker}(A)$ uvažme bázi $v_1, \dots, v_k$ jádra $\mathrm{Ker}(A)$.
- Podle Věty o rozšíření na bázi lze získat bázi $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n$ prostoru $\mathbb{T}^n$. Stačí dokázat, že $Av_{k+1}, \dots, Av_n$ je bází $\mathcal{S}(A)$, protože pak podle Věty 1 je $\mathrm{rank}(A) = \dim \mathcal{S}(A) = n - k$.

O dimenzi jádra a hodnosti matice

Věta 2

Pro každou matici $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$ platí $\dim \mathrm{Ker}(A) + \mathrm{rank}(A) = n$.

- Důkaz: Pro $k = \dim \mathrm{Ker}(A)$ uvažme bázi $v_1, \dots, v_k$ jádra $\mathrm{Ker}(A)$.
- Podle Věty o rozšíření na bázi lze získat bázi $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n$ prostoru $\mathbb{T}^n$. Stačí dokázat, že $Av_{k+1}, \dots, Av_n$ je bází $\mathcal{S}(A)$, protože pak podle Věty 1 je $\mathrm{rank}(A) = \dim \mathcal{S}(A) = n - k$.
- Generujícnost:

O dimenzi jádra a hodnosti matice

Věta 2

Pro každou matici $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$ platí $\dim \mathrm{Ker}(A) + \mathrm{rank}(A) = n$.

- Důkaz: Pro $k = \dim \mathrm{Ker}(A)$ uvažme bázi $v_1, \dots, v_k$ jádra $\mathrm{Ker}(A)$.
- Podle Věty o rozšíření na bázi lze získat bázi $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n$ prostoru $\mathbb{T}^n$. Stačí dokázat, že $Av_{k+1}, \dots, Av_n$ je bází $\mathcal{S}(A)$, protože pak podle Věty 1 je $\mathrm{rank}(A) = \dim \mathcal{S}(A) = n - k$.
- Generujícnost: Pro každé $y \in \mathcal{S}(A)$ existuje $x \in \mathbb{T}^n$ takové, že $y = Ax$.

O dimenzi jádra a hodnosti matice

Věta 2

Pro každou matici $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ platí $\dim \mathrm{Ker}(A) + \mathrm{rank}(A) = n$.

- Důkaz: Pro $k = \dim \mathrm{Ker}(A)$ uvažme bázi $v_1, \ldots, v_k$ jádra $\mathrm{Ker}(A)$.
- Podle Věty o rozšíření na bázi lze získat bázi $v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n$ prostoru $\mathbb{T}^n$. Stačí dokázat, že $Av_{k+1}, \ldots, Av_n$ je bází $\mathcal{S}(A)$, protože pak podle Věty 1 je $\mathrm{rank}(A) = \dim \mathcal{S}(A) = n - k$.
- Generujícnost: Pro každé $y \in \mathcal{S}(A)$ existuje $x \in \mathbb{T}^n$ takové, že $y = Ax$. Takové x lze zapsat jako $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$.

O dimenzi jádra a hodnosti matice

Věta 2

Pro každou matici $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$ platí $\dim \mathrm{Ker}(A) + \mathrm{rank}(A) = n$.

- Důkaz: Pro $k = \dim \mathrm{Ker}(A)$ uvažme bázi $v_1, \ldots, v_k$ jádra $\mathrm{Ker}(A)$.
- Podle Věty o rozšíření na bázi lze získat bázi $v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n$ prostoru $\mathbb{T}^n$. Stačí dokázat, že $Av_{k+1}, \ldots, Av_n$ je bází $\mathcal{S}(A)$, protože pak podle Věty 1 je $\mathrm{rank}(A) = \dim \mathcal{S}(A) = n - k$.
- Generujícnost: Pro každé $y \in \mathcal{S}(A)$ existuje $x \in \mathbb{T}^n$ takové, že $y = Ax$. Takové x lze zapsat jako $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$. Dosazením pak máme

$$y = Ax$$

O dimenzi jádra a hodnosti matice

Věta 2

Pro každou matici $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ platí $\dim \mathrm{Ker}(A) + \mathrm{rank}(A) = n$.

- Důkaz: Pro $k = \dim \mathrm{Ker}(A)$ uvažme bázi $v_1, \dots, v_k$ jádra $\mathrm{Ker}(A)$.
- Podle Věty o rozšíření na bázi lze získat bázi $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n$ prostoru $\mathbb{T}^n$. Stačí dokázat, že $Av_{k+1}, \dots, Av_n$ je bází $\mathcal{S}(A)$, protože pak podle Věty 1 je $\mathrm{rank}(A) = \dim \mathcal{S}(A) = n - k$.
- Generujícnost: Pro každé $y \in \mathcal{S}(A)$ existuje $x \in \mathbb{T}^n$ takové, že $y = Ax$. Takové x lze zapsat jako $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$. Dosazením pak máme

$$y = Ax = A\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right)$$

O dimenzi jádra a hodnosti matice

Věta 2

Pro každou matici $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$ platí $\dim \mathrm{Ker}(A) + \mathrm{rank}(A) = n$.

- Důkaz: Pro $k = \dim \mathrm{Ker}(A)$ uvažme bázi $v_1, \dots, v_k$ jádra $\mathrm{Ker}(A)$.
- Podle Věty o rozšíření na bázi lze získat bázi $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n$ prostoru $\mathbb{T}^n$. Stačí dokázat, že $Av_{k+1}, \dots, Av_n$ je bází $\mathcal{S}(A)$, protože pak podle Věty 1 je $\mathrm{rank}(A) = \dim \mathcal{S}(A) = n - k$.
- Generujícnost: Pro každé $y \in \mathcal{S}(A)$ existuje $x \in \mathbb{T}^n$ takové, že $y = Ax$. Takové x lze zapsat jako $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$. Dosazením pak máme
$$y = Ax = A\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i A v_i$$

O dimenzi jádra a hodnosti matice

Věta 2

Pro každou matici $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$ platí $\dim \mathrm{Ker}(A) + \mathrm{rank}(A) = n$.

- Důkaz: Pro $k = \dim \mathrm{Ker}(A)$ uvažme bázi $v_1, \ldots, v_k$ jádra $\mathrm{Ker}(A)$.
- Podle Věty o rozšíření na bázi lze získat bázi $v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n$ prostoru $\mathbb{T}^n$. Stačí dokázat, že $Av_{k+1}, \ldots, Av_n$ je bází $\mathcal{S}(A)$, protože pak podle Věty 1 je $\mathrm{rank}(A) = \dim \mathcal{S}(A) = n - k$.
- Generujícnost: Pro každé $y \in \mathcal{S}(A)$ existuje $x \in \mathbb{T}^n$ takové, že $y = Ax$. Takové x lze zapsat jako $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$. Dosazením pak máme

$$y = Ax = A\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A v_i = \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i (Av_i).$$

O dimenzi jádra a hodnosti matice

Věta 2

Pro každou matici $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ platí $\dim \mathrm{Ker}(A) + \mathrm{rank}(A) = n$.

- Důkaz: Pro $k = \dim \mathrm{Ker}(A)$ uvažme bázi $v_1, \ldots, v_k$ jádra $\mathrm{Ker}(A)$.
- Podle Věty o rozšíření na bázi lze získat bázi $v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n$ prostoru $\mathbb{T}^n$. Stačí dokázat, že $Av_{k+1}, \ldots, Av_n$ je bází $\mathcal{S}(A)$, protože pak podle Věty 1 je $\mathrm{rank}(A) = \dim \mathcal{S}(A) = n - k$.
- Generujícnost: Pro každé $y \in \mathcal{S}(A)$ existuje $x \in \mathbb{T}^n$ takové, že $y = Ax$. Takové x lze zapsat jako $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$. Dosazením pak máme
$$y = Ax = A\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A v_i = \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i (Av_i).$$
- Lineární nezávislost:

O dimenzi jádra a hodnosti matice

Věta 2

Pro každou matici $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$ platí $\dim \operatorname{Ker}(A) + \operatorname{rank}(A) = n$.

- Důkaz: Pro $k = \dim \operatorname{Ker}(A)$ uvažme bázi $v_1, \dots, v_k$ jádra $\operatorname{Ker}(A)$.
- Podle Věty o rozšíření na bázi lze získat bázi $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n$ prostoru $\mathbb{T}^n$. Stačí dokázat, že $Av_{k+1}, \dots, Av_n$ je bází $\mathcal{S}(A)$, protože pak podle Věty 1 je $\operatorname{rank}(A) = \dim \mathcal{S}(A) = n - k$.
- Generujícnost: Pro každé $y \in \mathcal{S}(A)$ existuje $x \in \mathbb{T}^n$ takové, že $y = Ax$. Takové x lze zapsat jako $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$. Dosazením pak máme
$$y = Ax = A\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i A v_i = \sum_{i=k+1}^n \alpha_i (Av_i).$$
- Lineární nezávislost: Buď $\sum_{i=k+1}^n \alpha_i (Av_i) = o$.

O dimenzi jádra a hodnosti matice

Věta 2

Pro každou matici $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$ platí $\dim \mathrm{Ker}(A) + \mathrm{rank}(A) = n$.

- Důkaz: Pro $k = \dim \mathrm{Ker}(A)$ uvažme bázi $v_1, \ldots, v_k$ jádra $\mathrm{Ker}(A)$.
- Podle Věty o rozšíření na bázi lze získat bázi $v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n$ prostoru $\mathbb{T}^n$. Stačí dokázat, že $Av_{k+1}, \ldots, Av_n$ je bází $\mathcal{S}(A)$, protože pak podle Věty 1 je $\mathrm{rank}(A) = \dim \mathcal{S}(A) = n - k$.
- Generujícnost: Pro každé $y \in \mathcal{S}(A)$ existuje $x \in \mathbb{T}^n$ takové, že $y = Ax$. Takové x lze zapsat jako $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$. Dosazením pak máme
$$y = Ax = A\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i A v_i = \sum_{i=k+1}^n \alpha_i (Av_i).$$
- Lineární nezávislost: Buď $\sum_{i=k+1}^n \alpha_i (Av_i) = o$. Pak $A(\sum_{i=k+1}^n \alpha_i v_i) = o$ a tak $\sum_{i=k+1}^n \alpha_i v_i \in \mathrm{Ker}(A)$.

O dimenzi jádra a hodnosti matice

Věta 2

Pro každou matici $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ platí $\dim \mathrm{Ker}(A) + \mathrm{rank}(A) = n$.

- Důkaz: Pro $k = \dim \mathrm{Ker}(A)$ uvažme bázi $v_1, \ldots, v_k$ jádra $\mathrm{Ker}(A)$.
- Podle Věty o rozšíření na bázi lze získat bázi $v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n$ prostoru $\mathbb{T}^n$. Stačí dokázat, že $Av_{k+1}, \ldots, Av_n$ je bází $\mathcal{S}(A)$, protože pak podle Věty 1 je $\mathrm{rank}(A) = \dim \mathcal{S}(A) = n - k$.
- Generujícnost: Pro každé $y \in \mathcal{S}(A)$ existuje $x \in \mathbb{T}^n$ takové, že $y = Ax$. Takové x lze zapsat jako $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$. Dosazením pak máme
$$y = Ax = A\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A v_i = \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i (Av_i).$$
- Lineární nezávislost: Buď $\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i (Av_i) = o$. Pak $A(\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i v_i) = o$ a tak $\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i v_i \in \mathrm{Ker}(A)$. Proto $\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{k} \beta_i v_i$.

O dimenzi jádra a hodnosti matice

Věta 2

Pro každou matici $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$ platí $\dim \mathrm{Ker}(A) + \mathrm{rank}(A) = n$.

- Důkaz: Pro $k = \dim \mathrm{Ker}(A)$ uvažme bázi $v_1, \dots, v_k$ jádra $\mathrm{Ker}(A)$.
- Podle Věty o rozšíření na bázi lze získat bázi $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n$ prostoru $\mathbb{T}^n$. Stačí dokázat, že $Av_{k+1}, \dots, Av_n$ je bází $\mathcal{S}(A)$, protože pak podle Věty 1 je $\mathrm{rank}(A) = \dim \mathcal{S}(A) = n - k$.
- Generujícnost: Pro každé $y \in \mathcal{S}(A)$ existuje $x \in \mathbb{T}^n$ takové, že $y = Ax$. Takové x lze zapsat jako $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$. Dosazením pak máme

$$y = Ax = A\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i A v_i = \sum_{i=k+1}^n \alpha_i (Av_i).$$

- Lineární nezávislost: Buď $\sum_{i=k+1}^n \alpha_i (Av_i) = o$. Pak $A(\sum_{i=k+1}^n \alpha_i v_i) = o$ a tak $\sum_{i=k+1}^n \alpha_i v_i \in \mathrm{Ker}(A)$. Proto $\sum_{i=k+1}^n \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^k \beta_i v_i$. Přepsáním máme $\sum_{i=1}^k (-\beta_i) v_i + \sum_{i=k+1}^n \alpha_i v_i = o$

O dimenzi jádra a hodnosti matice

Věta 2

Pro každou matici $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ platí $\dim \operatorname{Ker}(A) + \operatorname{rank}(A) = n$.

- Důkaz: Pro $k = \dim \operatorname{Ker}(A)$ uvažme bázi $v_1, \ldots, v_k$ jádra $\operatorname{Ker}(A)$.
- Podle Věty o rozšíření na bázi lze získat bázi $v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n$ prostoru $\mathbb{T}^n$. Stačí dokázat, že $Av_{k+1}, \ldots, Av_n$ je bází $\mathcal{S}(A)$, protože pak podle Věty 1 je $\operatorname{rank}(A) = \dim \mathcal{S}(A) = n - k$.
- Generujícnost: Pro každé $y \in \mathcal{S}(A)$ existuje $x \in \mathbb{T}^n$ takové, že $y = Ax$. Takové x lze zapsat jako $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$. Dosazením pak máme
$$y = Ax = A\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A v_i = \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i (Av_i).$$
- Lineární nezávislost: Buď $\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i (Av_i) = o$. Pak $A(\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i v_i) = o$ a tak $\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i v_i \in \operatorname{Ker}(A)$. Proto $\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{k} \beta_i v_i$. Přepsáním máme $\sum_{i=1}^{k} (-\beta_i) v_i + \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i v_i = o$ a z lineární nezávislosti $v_1, \ldots, v_n$ je $\alpha_{k+1} = \cdots = \alpha_n = \beta_1 = \cdots = \beta_k = 0$.

O dimenzi jádra a hodnosti matice

Věta 2

Pro každou matici $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$ platí $\dim \operatorname{Ker}(A) + \operatorname{rank}(A) = n$.

- Důkaz: Pro $k = \dim \operatorname{Ker}(A)$ uvažme bázi $v_1, \ldots, v_k$ jádra $\operatorname{Ker}(A)$.
- Podle Věty o rozšíření na bázi lze získat bázi $v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n$ prostoru $\mathbb{T}^n$. Stačí dokázat, že $Av_{k+1}, \ldots, Av_n$ je bází $\mathcal{S}(A)$, protože pak podle Věty 1 je $\operatorname{rank}(A) = \dim \mathcal{S}(A) = n - k$.
- Generujícnost: Pro každé $y \in \mathcal{S}(A)$ existuje $x \in \mathbb{T}^n$ takové, že $y = Ax$. Takové x lze zapsat jako $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$. Dosazením pak máme
$$y = Ax = A\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i A v_i = \sum_{i=k+1}^n \alpha_i (Av_i).$$
- Lineární nezávislost: Buď $\sum_{i=k+1}^n \alpha_i (Av_i) = o$. Pak $A(\sum_{i=k+1}^n \alpha_i v_i) = o$ a tak $\sum_{i=k+1}^n \alpha_i v_i \in \operatorname{Ker}(A)$. Proto $\sum_{i=k+1}^n \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^k \beta_i v_i$. Přepsáním máme $\sum_{i=1}^k (-\beta_i) v_i + \sum_{i=k+1}^n \alpha_i v_i = o$ a z lineární nezávislosti $v_1, \ldots, v_n$ je $\alpha_{k+1} = \cdots = \alpha_n = \beta_1 = \cdots = \beta_k = 0$. $\square$

Geometrický náhled na Větu 2

Geometrický náhled na Větu 2

- Uvažme zobrazení $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^m$ dané předpisem $f(x) = Ax$.

Geometrický náhled na Větu 2

- Uvažme zobrazení $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^m$ dané předpisem $f(x) = Ax$. Potom f zobrazuje n-dimenzionální prostor $\mathbb{T}^n$ na r-dimenzionální prostor $\mathcal{S}(A)$, kde $r = \mathrm{rank}(A)$.

Geometrický náhled na Větu 2

- Uvažme zobrazení $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^m$ dané předpisem $f(x) = Ax$. Potom f zobrazuje n-dimenzionální prostor $\mathbb{T}^n$ na r-dimenzionální prostor $\mathcal{S}(A)$, kde $r = \mathrm{rank}(A)$.
- Deficit $n - r \geq 0$ je dimenzí jádra matice A a čím větší je jádro, tím je menší obraz přes f.

Geometrický náhled na Větu 2

- Uvažme zobrazení $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^m$ dané předpisem $f(x) = Ax$. Potom f zobrazuje n-dimenzionální prostor $\mathbb{T}^n$ na r-dimenzionální prostor $\mathcal{S}(A)$, kde $r = \mathrm{rank}(A)$.
- Deficit $n - r \geq 0$ je dimenzí jádra matice A a čím větší je jádro, tím je menší obraz přes f. Dimenze jádra tedy popisuje míru „degenerace“ zobrazení.

Geometrický náhled na Větu 2

- Uvažme zobrazení $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^m$ dané předpisem $f(x) = Ax$. Potom f zobrazuje n-dimenzionální prostor $\mathbb{T}^n$ na r-dimenzionální prostor $\mathcal{S}(A)$, kde $r = \mathrm{rank}(A)$.
- Deficit $n - r \geq 0$ je dimenzí jádra matice A a čím větší je jádro, tím je menší obraz přes f. Dimenze jádra tedy popisuje míru „degenerace“ zobrazení. Dokonce máme popis této degenerace, protože $\mathrm{Ker}(A)$ obsahuje právě ty vektory, které se zobrazí na o.

Geometrický náhled na Větu 2

- Uvažme zobrazení $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^m$ dané předpisem $f(x) = Ax$. Potom f zobrazuje n-dimenzionální prostor $\mathbb{T}^n$ na r-dimenzionální prostor $\mathcal{S}(A)$, kde $r = \operatorname{rank}(A)$.
- Deficit $n - r \geq 0$ je dimenzí jádra matice A a čím větší je jádro, tím je menší obraz přes f. Dimenze jádra tedy popisuje míru „degenerace" zobrazení. Dokonce máme popis této degenerace, protože $\operatorname{Ker}(A)$ obsahuje právě ty vektory, které se zobrazí na o.
- Příklad výpočtu jádra matice: Mějme matici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 4 \\ -3 & -4 & 2 & 0 \\ 5 & 7 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 & -4 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Geometrický náhled na Větu 2

- Uvažme zobrazení $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^m$ dané předpisem $f(x) = Ax$. Potom f zobrazuje n-dimenzionální prostor $\mathbb{T}^n$ na r-dimenzionální prostor $\mathcal{S}(A)$, kde $r = \operatorname{rank}(A)$.
- Deficit $n - r \geq 0$ je dimenzí jádra matice A a čím větší je jádro, tím je menší obraz přes f. Dimenze jádra tedy popisuje míru „degenerace“ zobrazení. Dokonce máme popis této degenerace, protože $\operatorname{Ker}(A)$ obsahuje právě ty vektory, které se zobrazí na o.
- Příklad výpočtu jádra matice: Mějme matici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 4 \\ -3 & -4 & 2 & 0 \\ 5 & 7 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 & -4 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Potom její jádro má dimenzi $4 - 2 = 2$ a je tvořené řešeními soustavy $Ax = o$.

Geometrický náhled na Větu 2

- Uvažme zobrazení $f\colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^m$ dané předpisem $f(x) = Ax$. Potom f zobrazuje n-dimenzionální prostor $\mathbb{T}^n$ na r-dimenzionální prostor $\mathcal{S}(A)$, kde $r = \operatorname{rank}(A)$.
- Deficit $n - r \geq 0$ je dimenzí jádra matice A a čím větší je jádro, tím je menší obraz přes f. Dimenze jádra tedy popisuje míru „degenerace" zobrazení. Dokonce máme popis této degenerace, protože $\operatorname{Ker}(A)$ obsahuje právě ty vektory, které se zobrazí na o.
- Příklad výpočtu jádra matice: Mějme matici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 4 \\ -3 & -4 & 2 & 0 \\ 5 & 7 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 & -4 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

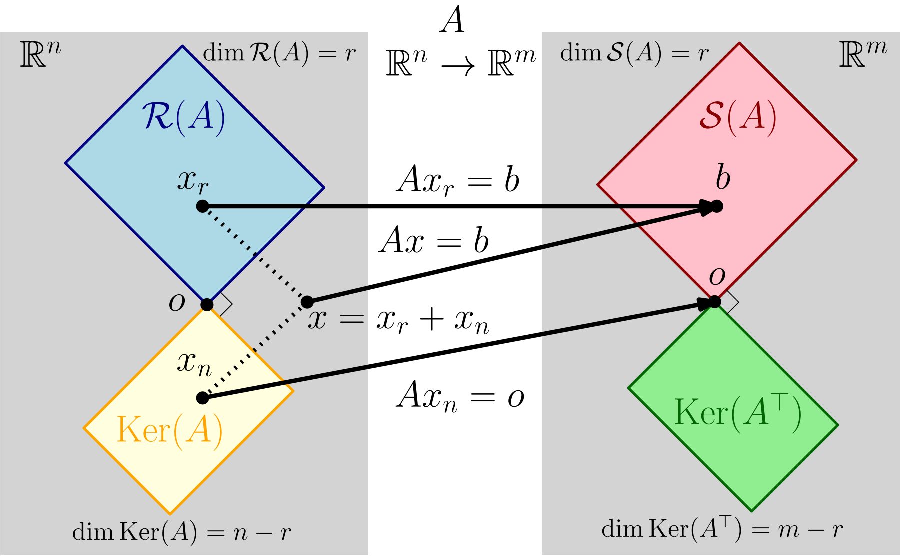
- Potom její jádro má dimenzi $4 - 2 = 2$ a je tvořené řešeními soustavy $Ax = o$. Ta jsou tvaru $(6x_3 + 4x_4, -4x_3 - 3x_4, x_3, x_4)^\top$ pro $x_3, x_4 \in \mathbb{R}$.

Geometrický náhled na Větu 2

- Uvažme zobrazení $f\colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^m$ dané předpisem $f(x) = Ax$. Potom f zobrazuje n-dimenzionální prostor $\mathbb{T}^n$ na r-dimenzionální prostor $\mathcal{S}(A)$, kde $r = \operatorname{rank}(A)$.
- Deficit $n - r \geq 0$ je dimenzí jádra matice A a čím větší je jádro, tím je menší obraz přes f. Dimenze jádra tedy popisuje míru „degenerace“ zobrazení. Dokonce máme popis této degenerace, protože $\operatorname{Ker}(A)$ obsahuje právě ty vektory, které se zobrazí na o.
- Příklad výpočtu jádra matice: Mějme matici

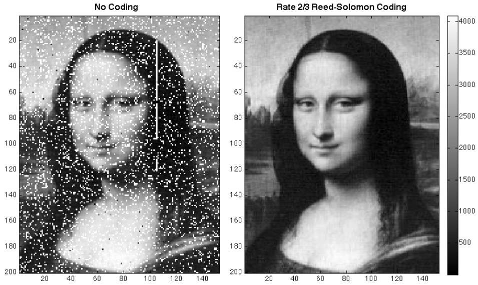
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 4 \\ -3 & -4 & 2 & 0 \\ 5 & 7 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 & -4 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Potom její jádro má dimenzi $4 - 2 = 2$ a je tvořené řešeními soustavy $Ax = o$. Ta jsou tvaru $(6x_3 + 4x_4, -4x_3 - 3x_4, x_3, x_4)^\top$ pro $x_3, x_4 \in \mathbb{R}$.
- Neboli $\operatorname{Ker}(A) = \{x_3(6, -4, 1, 0)^\top + x_4(4, -3, 0, 1)^\top : x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$. Tedy vektory $(6, -4, 1, 0)^\top, (4, -3, 0, 1)^\top$ tvoří bázi jádra.



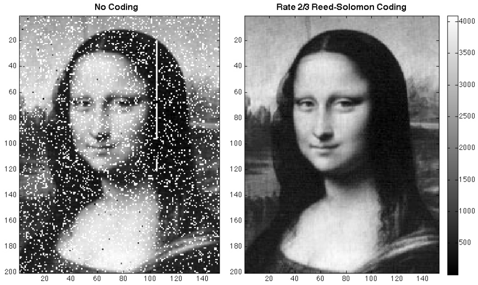
$$Ax = A(x_r + x_n) = Ax_r + Ax_n = Ax_r$$

Náčrt aplikace: kódování a detekce chyb



Zdroj: https://en.wikipedia.org

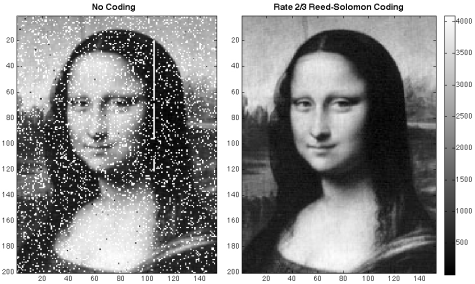
Náčrt aplikace: kódování a detekce chyb



Zdroj: https://en.wikipedia.org

- V Hammingově kódu $(7, 4, 3)$ jsme kódovali vstupy a délky 4 na výstupy $b = Ha$ délky 7 pomocí generující matice H s rozměry 7×4.

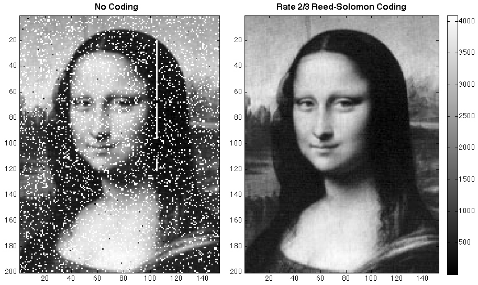
Náčrt aplikace: kódování a detekce chyb



Zdroj: https://en.wikipedia.org

- V Hammingově kódu $(7, 4, 3)$ jsme kódovali vstupy a délky 4 na výstupy $b = Ha$ délky 7 pomocí generující matice H s rozměry 7×4. Výstupy b tak tvořily prostor $\mathcal{S}(H)$, který byl podprostorem $\mathbb{Z}_2^7$ dimenze 4.

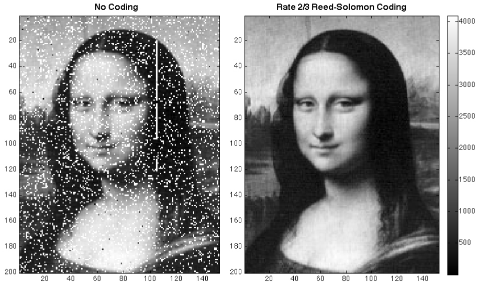
Náčrt aplikace: kódování a detekce chyb



Zdroj: https://en.wikipedia.org

- V Hammingově kódu $(7, 4, 3)$ jsme kódovali vstupy a délky 4 na výstupy $b = Ha$ délky 7 pomocí generující matice H s rozměry 7×4. Výstupy b tak tvořily prostor $\mathcal{S}(H)$, který byl podprostorem $\mathbb{Z}_2^7$ dimenze 4.
- Detekce chyb se dělala pomocí kontrolní matice D s rozměry 3×4, přičemž, pokud nenastala chyba, pak $Db = o$.

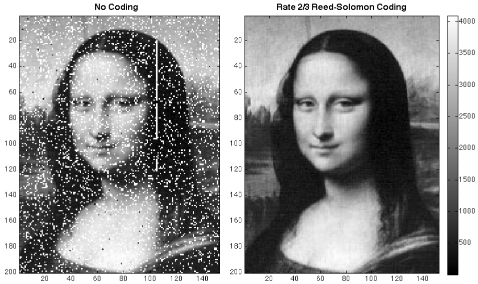
Náčrt aplikace: kódování a detekce chyb



Zdroj: https://en.wikipedia.org

- V Hammingově kódu $(7, 4, 3)$ jsme kódovali vstupy a délky 4 na výstupy $b = Ha$ délky 7 pomocí generující matice H s rozměry 7×4. Výstupy b tak tvořily prostor $\mathcal{S}(H)$, který byl podprostorem $\mathbb{Z}_2^7$ dimenze 4.
- Detekce chyb se dělala pomocí kontrolní matice D s rozměry 3×4, přičemž, pokud nenastala chyba, pak $Db = o$. Matice D tedy musí zobrazovat vektory z $\mathcal{S}(H)$ na o a tedy $\mathrm{Ker}(D) = \mathcal{S}(H)$.

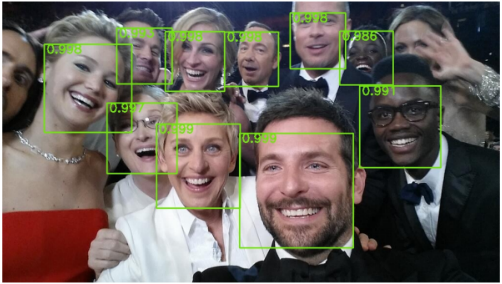
Náčrt aplikace: kódování a detekce chyb



Zdroj: https://en.wikipedia.org

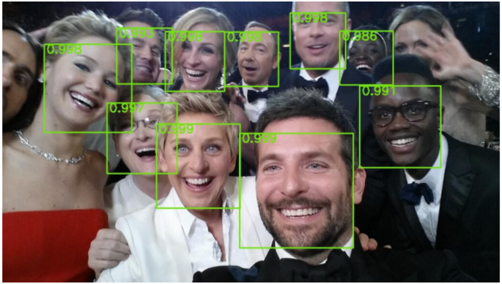
- V Hammingově kódu $(7, 4, 3)$ jsme kódovali vstupy a délky 4 na výstupy $b = Ha$ délky 7 pomocí generující matice H s rozměry 7×4. Výstupy b tak tvořily prostor $\mathcal{S}(H)$, který byl podprostorem $\mathbb{Z}_2^7$ dimenze 4.
- Detekce chyb se dělala pomocí kontrolní matice D s rozměry 3×4, přičemž, pokud nenastala chyba, pak $Db = o$. Matice D tedy musí zobrazovat vektory z $\mathcal{S}(H)$ na o a tedy $\mathrm{Ker}(D) = \mathcal{S}(H)$. Aby D měla jádro dimenze 4, tak podle Věty 2 musí mít hodnost 3 a proto stačí 3 lineárně nezávislé řádky.

Náčrt aplikace: Rozpoznávání obličejů



Zdroj: https://technologyreview.com

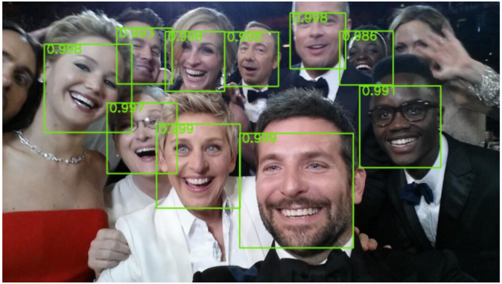
Náčrt aplikace: Rozpoznávání obličejů



Zdroj: https://technologyreview.com

- Digitální obraz reprezentujeme jako matici $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$, kde a_{ij} je barvou pixelu na pozici (i, j).

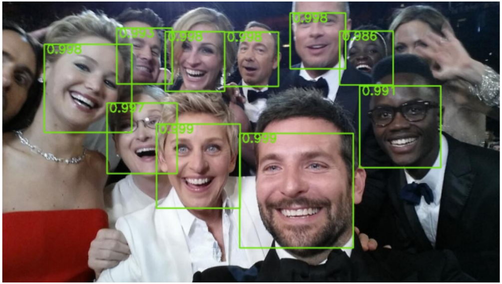
Náčrt aplikace: Rozpoznávání obličejů



Zdroj: https://technologyreview.com

- Digitální obraz reprezentujeme jako matici $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$, kde a_{ij} je barvou pixelu na pozici (i, j). Zjednodušeně: množina obrázků s obličeji tvoří podprostor prostoru $\mathbb{R}^{m \times n}$ a bází tohoto prostoru jsou „eigenfaces“, základní typy/rysy obličejů.

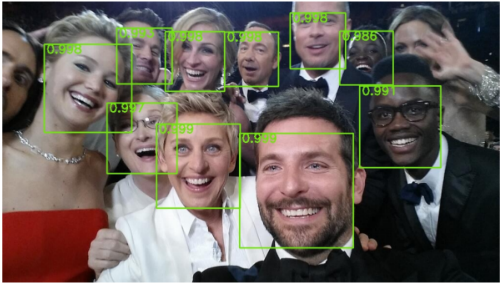
Náčrt aplikace: Rozpoznávání obličejů



Zdroj: https://technologyreview.com

- Digitální obraz reprezentujeme jako matici $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$, kde a_{ij} je barvou pixelu na pozici (i, j). Zjednodušeně: množina obrázků s obličeji tvoří podprostor prostoru $\mathbb{R}^{m\times n}$ a bází tohoto prostoru jsou „eigenfaces“, základní typy/rysy obličejů.
- Ke zjištění, zda obrázek obsahuje obličej spočítáme, zda odpovídající vektor leží v podprostoru obličejů anebo v jeho blízkosti.

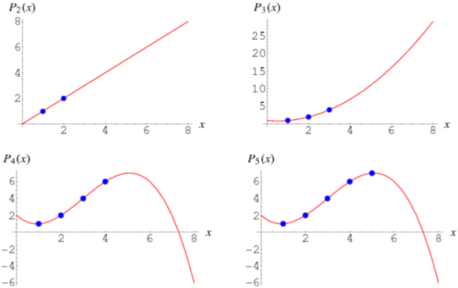
Náčrt aplikace: Rozpoznávání obličejů



Zdroj: https://technologyreview.com

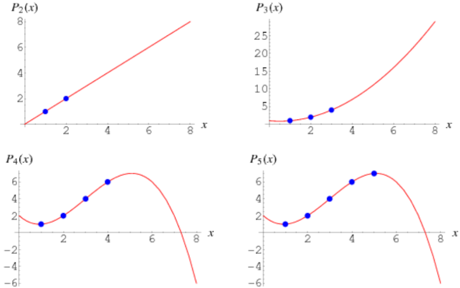
- Digitální obraz reprezentujeme jako matici $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$, kde a_{ij} je barvou pixelu na pozici (i, j). Zjednodušeně: množina obrázků s obličeji tvoří podprostor prostoru $\mathbb{R}^{m\times n}$ a bází tohoto prostoru jsou „eigenfaces“, základní typy/rysy obličejů.
- Ke zjištění, zda obrázek obsahuje obličej spočítáme, zda odpovídající vektor leží v podprostoru obličejů anebo v jeho blízkosti. Detaily zde.

Náčrt aplikace: Lagrangeův interpolační polynom



Zdroj: https://mathworld.wolfram.com

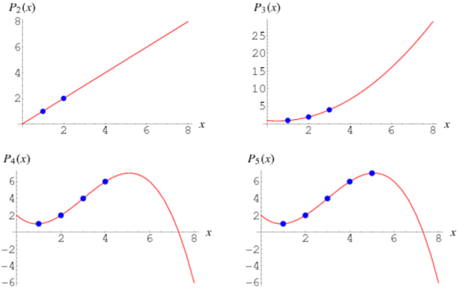
Náčrt aplikace: Lagrangeův interpolační polynom



Zdroj: https://mathworld.wolfram.com

- Chceme $n+1$ bodů $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ proložit polynomem $p(x)$ stupně nanejvýš n.

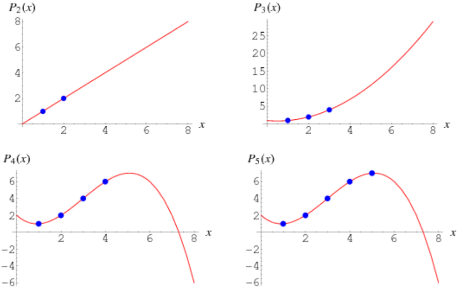
Náčrt aplikace: Lagrangeův interpolační polynom



Zdroj: https://mathworld.wolfram.com

- Chceme $n + 1$ bodů $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ proložit polynomem $p(x)$ stupně nanejvýš n. Na tento problém můžeme nahlížet pohledem vektorových prostorů.

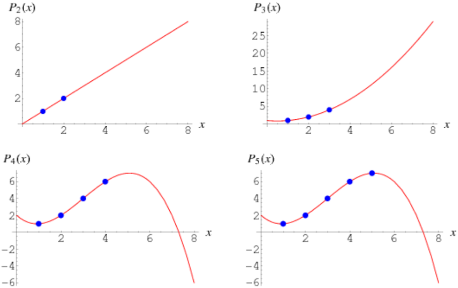
Náčrt aplikace: Lagrangeův interpolační polynom



Zdroj: https://mathworld.wolfram.com

- Chceme $n + 1$ bodů $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ proložit polynomem $p(x)$ stupně nanejvýš n. Na tento problém můžeme nahlížet pohledem vektorových prostorů.
- Chceme najít souřadnice polynomu $p(x)$ vzhledem k nějaké bázi prostoru $\mathcal{P}^n$.

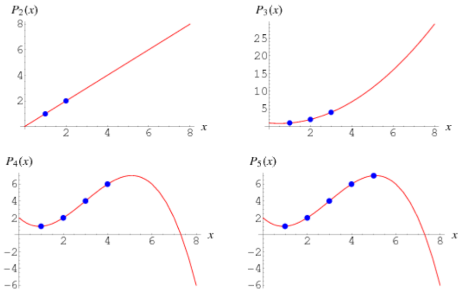
Náčrt aplikace: Lagrangeův interpolační polynom



Zdroj: https://mathworld.wolfram.com

- Chceme $n+1$ bodů $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ proložit polynomem $p(x)$ stupně nanejvýš n. Na tento problém můžeme nahlížet pohledem vektorových prostorů.
- Chceme najít souřadnice polynomu $p(x)$ vzhledem k nějaké bázi prostoru $\mathcal{P}^n$. To se dá snadno pro bázi tvořenou polynomy $p_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$ pro $i = 0, \dots, n$.

Náčrt aplikace: Lagrangeův interpolační polynom



Zdroj: https://mathworld.wolfram.com

- Chceme $n+1$ bodů $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ proložit polynomem $p(x)$ stupně nanejvýš n. Na tento problém můžeme nahlížet pohledem vektorových prostorů.
- Chceme najít souřadnice polynomu $p(x)$ vzhledem k nějaké bázi prostoru $\mathcal{P}^n$. To se dá snadno pro bázi tvořenou polynomy $p_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$ pro $i = 0, \dots, n$. Potom $p(x)$ se dá jednoznačně vyjádřit v tzv. Lagrangeově tvaru $p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i p_i(x)$.

Děkuji za pozornost a na shledanou.