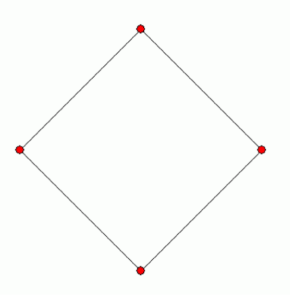
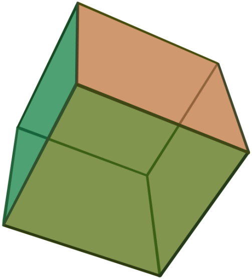
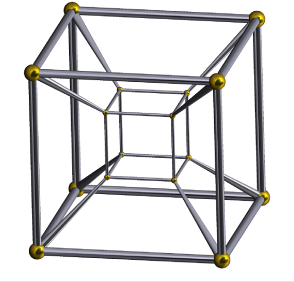
Lineární algebra 1

Martin Balko

7. přednáška

12. listopadu 2020

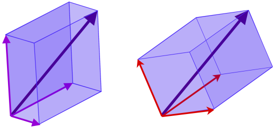
Dimenze

Zdroj: https://en.wikipedia.org

Báze

- Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{T}$. Pak **bází** je jakýkoliv lineárně nezávislý systém generátorů prostoru V.
- Jedná se o systém generátorů prostoru V minimální co do inkluze. Vynecháme-li libovolný generátor, tak už nevygenerujeme celé V.



Zdroj: https://en.wikipedia.org

- Pojem báze nám sloužil k zavedení **souřadnic** vektorového prostoru.
- Víme, že báze vždy existují.

Věta o existenci báze

Každý vektorový prostor má bázi.

- Dnes ukážeme, že všechny báze konečně generovaného prostoru V jsou **stejně velké**, na čemž založíme pojem dimenze.

Lemma o výměně

Lemma (Lemma o výměně)

Nechť $y_1, \dots, y_n$ je systémem generátorů vektorového prostoru V a nechť $x \in V$ má vyjádření $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i$. Pak pro libovolné k takové, že $\alpha_k \neq 0$ je $y_1, \dots, y_{k-1}, x, y_{k+1}, \dots, y_n$ systémem generátorů prostoru V.

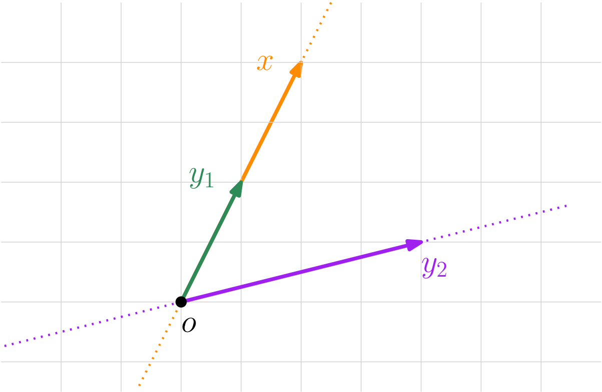
- Důkaz: Protože $\alpha_k \neq 0$, tak z $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i$ lze vyjádřit y_k jako
$$y_k = \frac{1}{\alpha_k}\left(x - \sum_{i\neq k} \alpha_i y_i\right).$$
- Ukážeme, že $y_1, \dots, y_{k-1}, x, y_{k+1}, \dots, y_n$ generují celé V. Mějme $z \in V$.
- Protože $y_1, \dots, y_n$ je systémem generátorů V, tak existují koeficienty $\beta_1, \dots, \beta_n$ takové, že $z = \sum_{i=1}^n \beta_i y_i$. Odsud vyjádříme vektor z jako

$$\beta_k y_k + \sum_{i\neq k} \beta_i y_i = \frac{\beta_k}{\alpha_k}\left(x - \sum_{i\neq k} \alpha_i y_i\right) + \sum_{i\neq k} \beta_i y_i = \frac{\beta_k}{\alpha_k} x + \sum_{i\neq k}\left(\beta_i - \frac{\beta_k}{\alpha_k}\alpha_i\right) y_i$$

$\square$

Příklad výměny

- V prostoru $\mathbb{R}^2$ uvažme generátory $y_1 = (1,2)^\top$ a $y_2 = (4,1)^\top$.
- Potom vektor $x = (2,4)^\top$ lze vyjádřit jako $x = 2y_1 + 0y_2$.



- Vyměníme-li y_1 za x, pak stále platí $\mathrm{span}\{x, y_2\} = \mathbb{R}^2$.
- Vyměnit y_2 za x ale nelze, protože pak je $\mathrm{span}\{x, y_1\}$ přímkou $\{(s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2 \colon 2s_1 = s_2\} \subset \mathbb{R}^2$.

Steinitzova věta o výměně

Věta (Steinitzova věta o výměně)

Nechť V je vektorový prostor, $x_1, \ldots, x_m$ je lineárně nezávislý systém ve V a nechť $y_1, \ldots, y_n$ je systém generátorů prostoru V. Pak platí

1. $m \leq n$,
2. existují navzájem různé indexy $k_1, \ldots, k_{n-m}$ takové, že vektory $x_1, \ldots, x_m, y_{k_1}, \ldots, y_{k_{n-m}}$ tvoří systém generátorů prostoru V.

Obrázek: Ernst Steinitz (1871–1928).

Zdroj: https://family.steinitz.net

Důkaz Steinitzovy věty o výměně

- Postupujeme indukcí podle m. Pro $m = 0$ tvrzení platí triviálně.
- Indukční krok: nechť tvrzení platí pro $m - 1$. Chceme jej dokázat pro m.
- Vektory $x_1, \ldots, x_{m-1}$ jsou lineárně nezávislé. Podle indukčního předpokladu platí $m - 1 \leq n$ a existují navzájem různé indexy $\ell_1, \ldots, \ell_{n-m+1}$ takové, že vektory $x_1, \ldots, x_{m-1}, y_{\ell_1}, \ldots, y_{\ell_{n-m+1}}$ generují V.
- Kdyby $m - 1 = n$, pak $x_1, \ldots, x_{m-1}$ generují V. Tedy $x_m \in \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_{m-1}\}$. Což je spor s lineární nezávislostí $x_1, \ldots, x_m$. Takže $m \leq n$, čímž je dokázaná první část.
- Protože $x_1, \ldots, x_{m-1}, y_{\ell_1}, \ldots, y_{\ell_{n-m+1}}$ generují V, tak lze vyjádřit x_m jako

$$x_m = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^{n-m+1} \beta_j y_{\ell_j}.$$

- $\beta_1 = \cdots = \beta_{n-m+1} = 0$ dává spor s lineární nezávislostí $x_1, \ldots, x_m$. Tedy existuje $\beta_k \neq 0$. Podle Lemma o výměně lze vyměnit y_{ℓ_k} za x a $x_1, \ldots, x_m, y_{\ell_1}, \ldots, y_{\ell_{k-1}}, y_{\ell_k+1}, \ldots, y_{\ell_{n-m+1}}$ pak generují V. $\square$

Důsledek o velikostech bází

Důsledek

Všechny báze konečně generovaného vektorového prostoru V jsou stejně velké.

- Důkaz: Nechť $x_1, \dots, x_m$ a $y_1, \dots, y_n$ jsou dvě báze prostoru V.
- Potom $x_1, \dots, x_m$ jsou lineárně nezávislé a $y_1, \dots, y_n$ je systém generátorů V. Podle Steinitzovy věty o výměně tedy $m \leq n$.
- Analogicky $y_1, \dots, y_n$ jsou lineárně nezávislé a $x_1, \dots, x_m$ je systém generátorů V. Podle Steinitzovy věty o výměně tedy $n \leq m$.
- Dohromady pak $m = n$. $\square$

- Dá se zobecnit i na prostory, které nejsou konečně generované s tím, že všechny báze pak mají stejnou mohutnost.

- Protože víme, že báze existují v každém vektorovém prostoru (Věta) a všechny mají stejnou velikost (Důsledek), můžeme zavést pojem dimenze vektorového prostoru jako velikost libovolné báze.

Vztah počtu prvků systému k dimenzi

Vztah počtu prvků systému k dimenzi

Tvrzení

Pro vektorový prostor V platí:

1. Jsou-li $x_1, \ldots, x_m \in V$ lineárně nezávislé, pak $m \leq \dim V$. Pokud $m = \dim V$, pak je $x_1, \ldots, x_m$ bází prostoru V.
2. Jsou-li $y_1, \ldots, y_n$ generátory V, pak $n \geq \dim V$. Pokud $n = \dim V$, pak je $y_1, \ldots, y_n$ bází prostoru V.

- Důkaz: Pro $d = \dim V$ buď $z_1, \ldots, z_d$ bází V.
  1. $x_1, \ldots, x_m$ jsou lineárně nezávislé a $z_1, \ldots, z_d$ jsou generátory V. Tedy podle Steinitzovy věty o výměně je $m \leq d$ a navíc při $m = d$ lze $x_1, \ldots, x_m$ doplnit $d - m = 0$ vektory na systém generátorů V. Tedy $x_1, \ldots, x_m$ generují V a tvoří tak bázi.
  2. $y_1, \ldots, y_n$ jsou generátory V a $z_1, \ldots, z_d$ jsou lineárně nezávislé. Tedy podle Steinitzovy věty o výměně je $n \geq d$. Jsou-li $y_1, \ldots, y_n$ lineárně závislé, pak lze jeden vynechat a získat systém generátorů V velikosti $n - 1$. Steinitzova věta pak dává $d \leq n - 1$. Tedy pokud $n = d$, tak $y_1, \ldots, y_n$ jsou lineárně nezávislé a tvoří tak bázi. $\square$

Rozšíření lineárně nezávislého systému na bázi

- Tedy báze je maximální lineárně nezávislý systém a zároveň minimální systém generátorů.

Věta

Každý lineárně nezávislý systém vektorového prostoru V lze rozšířit na bázi prostoru V.

- Důkaz:
- Nechť jsou vektory $x_1, \ldots, x_m \in V$ lineárně nezávislé a buď $z_1, \ldots, z_d$ bází prostoru V, kde $d = \dim V$.
- Podle Steinitzovy věty o výměně existují různé indexy $k_1, \ldots, k_{d-m}$ takové, že vektory

$$x_1, \ldots, x_m, z_{k_1}, \ldots, z_{k_{d-m}}$$

generují V.
- Tedy máme systém $d = \dim V$ generátorů prostoru V.
- Podle předešlého tvrzení je tedy $x_1, \ldots, x_m, z_{k_1}, \ldots, z_{k_{d-m}}$ bází V. $\square$

Dimenze podprostoru

Věta

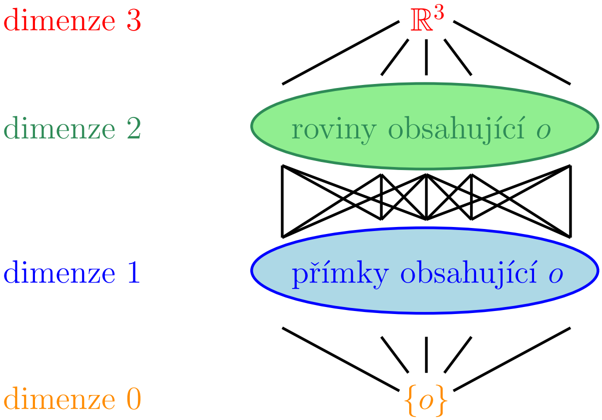
Je-li W podprostorem prostoru V, pak $\dim W \leq \dim V$. Pokud $\dim W = \dim V$, pak $W = V$.

- Důkaz:
- Definujme $M = \emptyset$. Pokud $\mathrm{span}(M) = W$, pak jsme hotovi. Jinak existuje $v \in W \setminus \mathrm{span}(M)$. Pak přidáme v do M a proces opakujeme.
- Protože M je lineárně nezávislá, tak Tvrzení dává $|M| \leq \dim V$. Po konečně mnoha krocích pak dostaneme $W = \mathrm{span}(M)$ a M bude bází W, přičemž $\dim W = |M| \leq \dim V$.
- Pokud $\dim W = \dim V$, pak je M podle Tvrzení bází V a $W = V$. $\square$

- Příklady dimenzí podprostorů prostoru $\mathbb{R}^2$:
  - dimenze 2: pouze $\mathbb{R}^2$ (podle Věty),
  - dimenze 1: přímky procházející počátkem (generovány 1 vektorem),
  - dimenze 0: pouze $\{o\}$.

Struktura podprostorů

- Hasseův diagram podprostorů prostoru V s $\dim V = n$ uspořádaný inkluzí bude mít $n+1$ hladin. Pro $i \in \{0, \ldots, n\}$ je i-tá hladina je tvořená neporovnatelnými podprostory dimenze i. Největším prvkem je V a nejmenším je $\{o\}$.
- Hasseův diagram podprostorů $\mathbb{R}^3$:



Spojení podprostorů

- Spojení podprostorů U a V vektorového prostoru W je definované jako $U + V = \{u + v \colon u \in U, v \in V\}$.

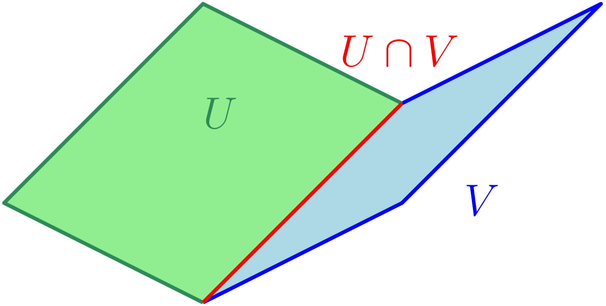
Tvrzení

Pro podprostory U a V vektorového prostoru W platí $U + V = \mathrm{span}(U \cup V)$.

- Důkaz:
- Inkluze $\subseteq$: Je triviální z uzavřenosti na součty prostoru $\mathrm{span}(U \cup V)$.
- Inkluze $\supseteq$: Stačí ukázat $U + V \supseteq U \cup V$ a $U + V \Subset W$. První část plyne z $o \in U, V$, protože $u = u + o \in U + V$ a $v = o + v \in U + V$ pro každé $u \in U$ a $v \in V$.
- K důkazu $U + V \Subset W$ stačí ověřit uzavřenost na součty a násobky. Mějme $x_1, x_2 \in U + V$ a skalár α. Pak $x_1 = u_1 + v_1$ a $x_2 = u_2 + v_2$ pro $u_1, u_2 \in U$ a $v_1, v_2 \in V$.
  - Součty: $x_1 + x_2 = u_1 + v_1 + u_2 + v_2 = (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) \in U + V$.
  - Násobky: $\alpha x_1 = \alpha(u_1 + v_1) = (\alpha u_1) + (\alpha v_1) \in U + V$.

$\square$

Příklady spojení podprostorů



$$U + V = \mathrm{span}(U \cup V)$$

- $\mathbb{R}^2 = \mathrm{span}\{e_1\} + \mathrm{span}\{e_2\}$,
- $\mathbb{R}^3 = \mathrm{span}\{e_1\} + \mathrm{span}\{e_2\} + \mathrm{span}\{e_3\}$,
- $\mathbb{R}^3 = \mathrm{span}\{e_1, e_2\} + \mathrm{span}\{e_3\}$,
- $\mathbb{R}^2 = \mathrm{span}\{(1,2)^\top\} + \mathrm{span}\{(3,4)^\top\}$,
- $\mathbb{R}^2 = \mathrm{span}\{(1,2)^\top\} + \mathrm{span}\{(3,4)^\top\} + \mathrm{span}\{(5,6)^\top\}$.

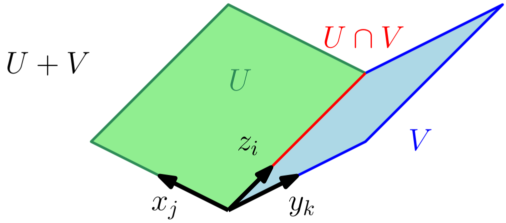
Dimenze spojení

Věta

Pro podprostory U a V vektorového prostoru W platí

$$\dim(U+V)+\dim(U\cap V)=\dim U+\dim V.$$

- Plán důkazu: Z uzavřenosti podprostorů na průniky je $U \cap V \Subset W$ a tedy $U\cap V$ má bázi $z_1,\dots,z_d$. Z Věty o rozšíření na bázi ji můžeme rozšířit na bázi $z_1,\dots,z_d,x_1,\dots,x_m$ podprostoru U a na bázi $z_1,\dots,z_d,y_1,\dots,y_n$ podprostoru V.



- Pak stačí ukázat, že $z_1,\dots,z_d,x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n$ je bází $U+V$.
- Ukážeme, že to jsou generátory $U+V$, a pak, že jsou lineárně nezávislé.

Důkaz věty o dimenzi spojení a průniku

- Generujícnost: Máme-li $x \in U + V$, pak $x = u + v$ pro $u \in U$ a $v \in V$.
- Vyjádříme $u = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i z_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j x_j$ a $v = \sum_{i=1}^{d} \gamma_i z_i + \sum_{k=1}^{n} \delta_k y_k$.
- Potom

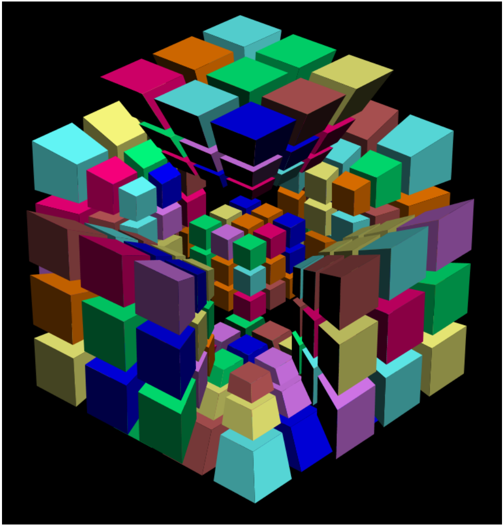
$$x = u + v = \sum_{i=1}^{d} (\alpha_i + \gamma_i) z_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j x_j + \sum_{k=1}^{n} \delta_k y_k$$

  je lineární kombinací vektorů $z_1, \ldots, z_d, x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n$.

- Lineární nezávislost: Pro $o = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i z_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j x_j + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k y_k$ chceme ukázat, že všechny koeficienty jsou nulové.
- Označme $z = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i z_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j x_j = -\sum_{k=1}^{n} \gamma_k y_k$. Pak $z \in U \cap V$ a tedy lze zapsat jako $z = \sum_{i=1}^{d} \delta_i z_i$. Neboli $\sum_{i=1}^{d} \delta_i z_i + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k y_k = o$.
- $z_1, \ldots, z_d, y_1, \ldots, y_n$ jsou lineárně nezávislé a tedy $\delta_1 = \cdots = \delta_d = \gamma_1 = \cdots = \gamma_n = 0$. Po dosazení je $\sum_{i=1}^{d} \alpha_i z_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j x_j = o$.
- $z_1, \ldots, z_d, x_1, \ldots, x_m$ jsou lineárně nezávislé a tedy $\alpha_1 = \cdots = \alpha_d = \beta_1 = \cdots = \beta_m = 0$. $\square$

Direktní součet podprostorů

- Pokud $U \cap V = \{o\}$, pak spojení $U + V$ nazýváme direktním součtem podprostorů.
- Značíme $U \oplus V$.
- Podle Věty pak platí $\dim(U \oplus V) = \dim U + \dim V$.
- Navíc každé $w \in W$ lze zapsat jediným způsobem jako $w = u + v$ pro $u \in U$ a $v \in V$.
- Příklady:
  - $\mathbb{R}^2 = \mathrm{span}\{e_1\} \oplus \mathrm{span}\{e_2\}$,
  - $\mathbb{R}^2 = \mathrm{span}\{(1,2)^\top\} \oplus \mathrm{span}\{(3,4)^\top\}$,
  - $\mathbb{R}^3 = \mathrm{span}\{e_1\} \oplus \mathrm{span}\{e_2\} \oplus \mathrm{span}\{e_3\}$,
  - $\mathbb{R}^2 = \mathrm{span}\{(1,2)^\top\} + \mathrm{span}\{(3,4)^\top\} + \mathrm{span}\{(5,6)^\top\}$ direktním součtem není.



Obrázek: 4-rozměrná Rubikova kostka:
https://www.youtube.com/watch?v=0AqMb-edXlc&ab_channel=KinseyFavre

Zdroj: https://en.wikipedia.org

Děkuji za pozornost.