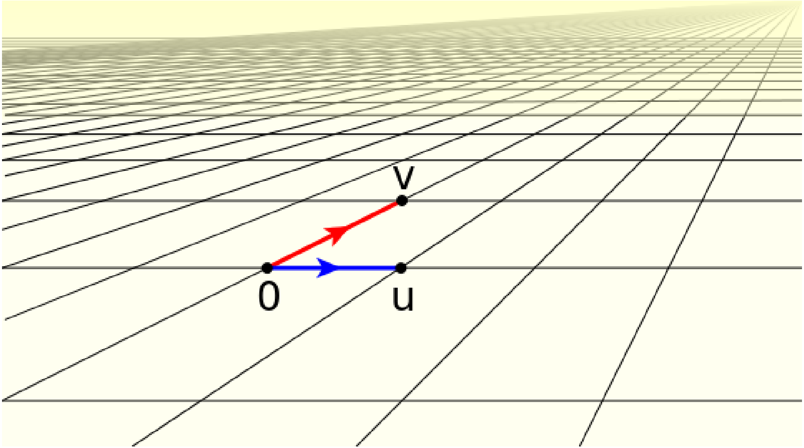
Lineární algebra 1

Martin Balko

6. přednáška

5. listopadu 2020

Podprostory a lineární kombinace



Zdroj: https://wikiwand.com

Vektorové prostory a podprostory

- Buď $\mathbb{T}$ těleso s neutrálními prvky 0 a 1 pro sčítání a násobení. Vektorový prostor nad $\mathbb{T}$ je množina V s operacemi sčítání vektorů $+: V^2 \to V$ a násobení vektoru skalárem $\cdot: \mathbb{T} \times V \to V$ splňující pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{T}$ a $u, v \in V$:
  1. $(V, +)$ je Abelova grupa (neutrální prvek o, inverzním k u je $-u$),
  2. $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$, (asociativita)
  3. $1v = v$,
  4. $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$, (distributivita)
  5. $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$. (distributivita)

- Je-li V vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{T}$, pak $U \subseteq V$ je podprostorem V, pokud U tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{T}$ se stejně definovanými operacemi.
- Ekvivalentně U musí mít nulový vektor a být uzavřené na součty vektorů a násobky skalárem.

Lineární obal

Tvrzení

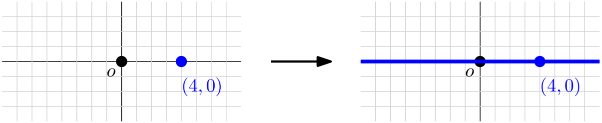
Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{T}$. Pak průnik libovolného systému $(V_i)_{i\in I}$ vektorových podprostorů prostoru V je vektorový podprostor V.

- Důkaz: Podle tvrzení z minula stačí ověřit $o \in \bigcap_{i\in I} V_i$ a uzavřenost na sčítání vektorů a násobení vektorů skalárem.
- Protože $o \in V_i$ pro každé $i \in I$, tak $o \in \bigcap_{i\in I} V_i$.
- Pro $u, v \in \bigcap_{i\in I} V_i$ platí $u, v \in V_i$ pro každé $i \in I$. Tedy $u + v \in V_i$ pro každé $i \in I$ a $u + v \in \bigcap_{i\in I} V_i$.
- Pro $\alpha \in \mathbb{T}$ a $v \in \bigcap_{i\in I} V_i$ platí $v \in V_i$ pro každé $i \in I$. Tedy $\alpha v \in V_i$ pro každé $i \in I$ a $\alpha v \in \bigcap_{i\in I} V_i$. $\square$

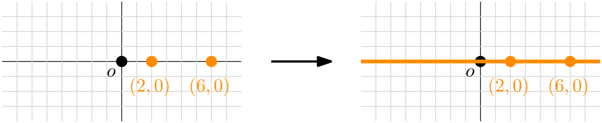
- Pro vektorový prostor V nad tělesem $\mathbb{T}$ a $W \subseteq V$ je lineárním obalem množiny W průnik $\bigcap_{U: W\subseteq U \Subset V} U$ všech podprostorů, které obsahují W.
- Značíme $\mathrm{span}(W)$.

Příklady lineárních obalů v $\mathbb{R}^2$

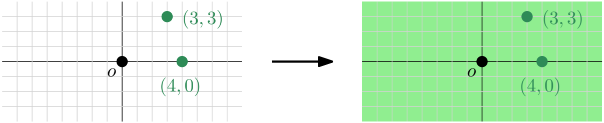
1. $\mathrm{span}\{(4,0)^\top\}$ je přímka, konkrétně osa x_1.



2. $\mathrm{span}\{(2,0)^\top, (6,0)^\top\}$ je přímka, konkrétně osa x_1.



3. $\mathrm{span}\{(4,0)^\top, (3,3)^\top\}$ je celá rovina.



4. $\mathrm{span}\{\} = \{o\}$.

Generátory a lineární kombinace

- Nechť $U = \mathrm{span}(W)$ pro nějaké $W \subseteq V$. Pak říkáme, že W generuje prostor U a prvky množiny W jsou generátory prostoru U.
- Prostor U je konečně generovaný, pokud je generovaný nějakou konečnou množinou vektorů.
- Příklad:
- Podprostor U v $\mathbb{R}^2$ odpovídající ose x_1 lze generovat jakýmkoli vektorem $(a, 0)^\top$, kde $a \neq 0$. Podprostor U lze generovat třeba i množinou $\{(2, 0)^\top, (5, 0)^\top\}$, ale ta není minimální.

- Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{T}$ a $v_1, \ldots, v_n \in V$. Pak lineární kombinací vektorů $v_1, \ldots, v_n$ rozumíme výraz typu

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n,$$

kde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{T}$.

Generování lineárními kombinacemi

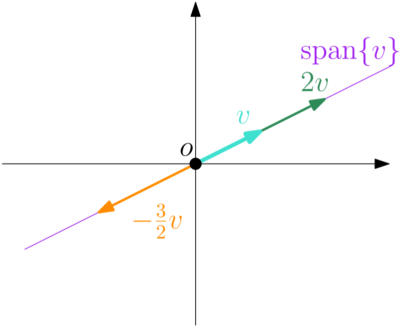
Věta

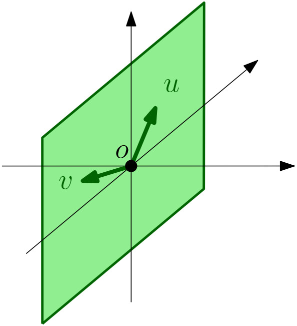
Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{T}$ a nechť $v_1, \ldots, v_n \in V$. Pak

$$\operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_n\} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i : \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{T} \right\}.$$

- Důkaz: Inkuze $\supseteq$: Lineární obal $\operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_n\}$ je z definice podprostorem V obsahujícím $v_1, \ldots, v_n$. Z uzavřenosti na součty a násobky obsahuje všechny lineární kombinace $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$.
- Inkuze $\subseteq$: Stačí ukázat, že $M = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i : \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{T}\}$ je podprostorem V obsahujícím $v_1, \ldots, v_n$. Pak je totiž M jedním z podprostorů, jejichž průnikem $\operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_n\}$ vznikl.
- Nulové koeficienty dávají $o \in M$. Podobně $v_1, \ldots, v_n \in M$.
- Uzavřenost na součty: Pro $u = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$ a $v = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i v_i$ je $u + v = \sum_{i=1}^{n} (\beta_i + \gamma_i) v_i \in M$.
- Uzavřenost na násobky: Pro $\alpha \in \mathbb{T}$ a $u = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$ je $\alpha u = \sum_{i=1}^{n} (\alpha \beta_i) v_i \in M$. $\square$

Příklady





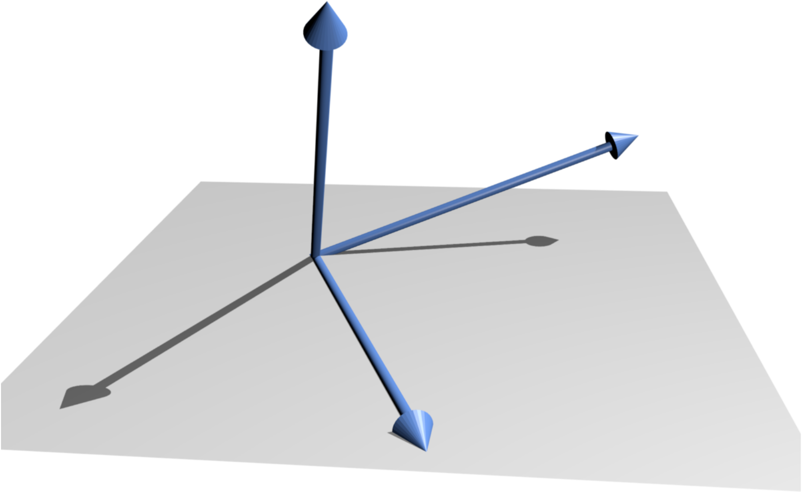
- Pomocí (konečných) lineárních kombinací lze generovat lineární obal i nekonečné množiny vektorů.

Tvrzení

Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{T}$ a nechť $M \subseteq V$. Pak $\mathrm{span}(M)$ je tvořen všemi lineárními kombinacemi každé konečné soustavy vektorů z M.

- Důkaz na cvičení (analogický předešlému důkazu).

Lineární nezávislost



Zdroj: https://en.wikipedia.org

Lineární nezávislost

- Motivace: najít množinu generátorů minimální co do inkluze.
- Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{T}$ a nechť $v_1, \ldots, v_n \in V$. Pak vektory $v_1, \ldots, v_n$ jsou lineárně nezávislé, pokud $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = o$ nastane pouze pro $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.
- V opačném případě jsou $v_1, \ldots, v_n$ lineárně závislé. Neboli pokud existují $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{T}$ ne všechna nulová a taková, že $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = o$.
- Příklady:
  - $(1,0)^\top$ je lineárně nezávislý,
  - $(1,0)^\top, (2,0)^\top$ jsou lineárně závislé,
  - $(1,1)^\top, (1,2)^\top$ jsou lineárně nezávislé,
  - $(1,0)^\top, (0,1)^\top, (1,1)^\top$ jsou lineárně závislé,
  - $(0,0)^\top$ je lineárně závislý,
  - prázdná množina je lineárně nezávislá.
- Definice lineární (ne)závislosti se dá rozšířit i na nekonečnou množinu M vektorů: M je lineárně nezávislá, pokud každá konečná podmnožina M je lineárně nezávislá. Jinak je M lineárně závislá.

Jak zjistit lineární (ne)závislost?

- Uvažme vektory $(1,3,2)^\top$, $(2,5,3)^\top$ a $(2,3,1)^\top$. Jsou lineárně závislé?
- Z definice nás zajímají skaláry $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- To vede na soustavu tří lineárních rovnic s proměnnými α, β, γ:

$$\begin{array}{l} 1\alpha + 2\beta + 2\gamma = 0 \\ 3\alpha + 5\beta + 3\gamma = 0 \\ 2\alpha + 3\beta + 1\gamma = 0 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- Dostáváme například nenulové řešení $\alpha = 4$, $\beta = -3$ a $\gamma = 1$. Vektory jsou tedy lineárně závislé.
- Souvislost s maticemi: sloupce (i řádky) regulární matice jsou lineárně nezávislými vektory.

Charakterizace lineární nezávislosti

Věta

Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{T}$ a nechť $v_1, \dots, v_n \in V$. Pak $v_1, \dots, v_n$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když existuje $k \in \{1, \dots, n\}$ a $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{T}$ taková, že $v_k = \sum_{i \neq k} \alpha_i v_i$. Neboli

$$v_k \in \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_n\}.$$

- Důkaz:
- Implikace $\Rightarrow$: Pokud jsou $v_1, \dots, v_n$ lineárně závislé, pak existují $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{T}$ takové, že $\sum_{i=1}^n \beta_i v_i = o$ a $\beta_k \neq 0$ pro nějaké $k \in \{1, \dots, n\}$. Pak $\beta_k v_k = -\sum_{i \neq k} \beta_i v_i$ a tedy $v_k = \sum_{i \neq k} (-\beta_k^{-1} \beta_i) v_i$.
- Implikace $\Leftarrow$: Nechť $v_k = \sum_{i \neq k} \alpha_i v_i$. Pak $v_k - \sum_{i \neq k} \alpha_i v_i = o$, což je netriviální lineární kombinace rovná o. Tedy $v_1, \dots, v_n$ jsou lineárně závislé. $\square$

Ještě jedna charakterizace lineární nezávislosti

Důsledek

Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{T}$ a nechť $v_1, \dots, v_n \in V$. Pak $v_1, \dots, v_n$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když existuje $k \in \{1, \dots, n\}$ takové, že

$$\operatorname{span}\{v_1, \dots, v_n\} = \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_n\}. \tag{1}$$

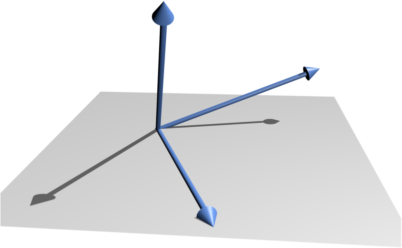
- Neboli $v_1, \dots, v_n$ jsou lineárně závislé $\Leftrightarrow$ mezi nimi existuje nadbytečný.
- Důkaz: $\Rightarrow$: Buď $v_1, \dots, v_n$ lineárně závislé. Chceme rovnost (1).
  Z věty máme $k \in \{1, \dots, n\}$ a $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{T}$ takové, že $v_k = \sum_{i \neq k} \alpha_i v_i$.
  - Inkluze $\supseteq$ je triviální.
  - Inkluze $\subseteq$: libovolný vektor $u \in \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_n\}$ lze zapsat jako

$$u = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i = \beta_k v_k + \sum_{i \neq k} \beta_i v_i = \beta_k \left(\sum_{i \neq k} \alpha_i v_i \right) + \sum_{i \neq k} \beta_i v_i.$$

    Tedy $u = \sum_{i \neq k} (\beta_k \alpha_i + \beta_i) v_i \in \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_n\}$.
- $\Leftarrow$: Platí-li (1), pak
  $v_k \in \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_n\} = \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_n\}$. Podle věty jsou tak $v_1, \dots, v_n$ lineárně závislé. $\square$

Příklady

- Příklad tří lineárně nezávislých vektorů v $\mathbb{R}^3$:

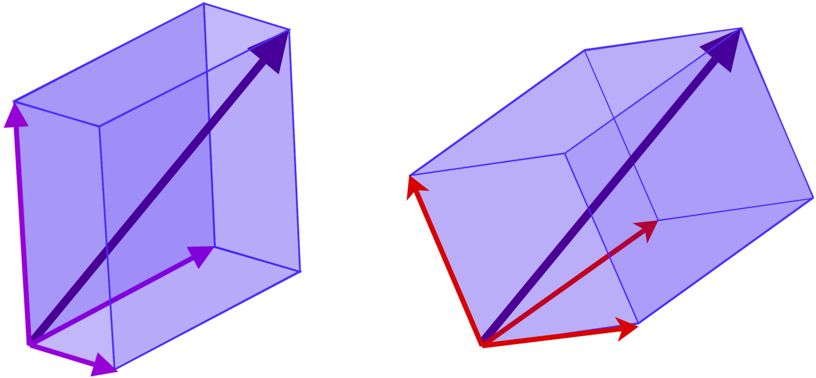


Zdroj: https://en.wikipedia.org

- Příklady tří lineárně závislých vektorů v $\mathbb{R}^3$:

Zdroj: https://en.wikipedia.org

Báze



Zdroj: https://en.wikipedia.org

Báze

- Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{T}$. Pak **bází** je jakýkoliv lineárně nezávislý systém generátorů prostoru V.

- Jedná se o systém generátorů prostoru V minimální co do inkluze. Vynecháme-li libovolný generátor, tak už nevygenerujeme celé V.
- Bázi skládající se z vektorů $v_1, \ldots, v_n$ někdy značíme $\{v_1, \ldots, v_n\}$, ale jako bázi rozumíme uspořádanou množinu.

- Příklady bází:
  - V $\mathbb{R}^2$ je bází třeba $(1,0)^\top, (0,1)^\top$, ale i $(7,5)^\top, (2,3)^\top$,
  - V $\mathbb{R}^n$ lze uvážit kanonickou bázi $\mathrm{kan} = \{e_1, \ldots, e_n\}$, kde e_i má jedničku na pozici i a jinak nuly.
  - V prostoru polynomů $\mathcal{P}^n$ max. stupně n je bází $1, x, \ldots, x^n$.
  - V prostoru polynomů $\mathcal{P}$ je (nekonečnou) bází $1, x, , x^2, \ldots$.

Souřadnice

Věta

Nechť $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ je bází prostoru V. Pak pro každý vektor $u \in V$ existují jednoznačně určené koeficienty $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{T}$ takové, že $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$.

- Důkaz: Uvažme libovolný vektor $u \in V$.
- Existence: Vektory $v_1, \ldots, v_n$ tvoří bázi V. Z definice báze tak existují $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{T}$ takové, že $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$.
- Jednoznačnost: Uvažme libovolné vyjádření $u = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i$. Pak

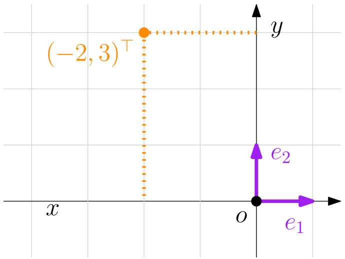
$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i - \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i = u - u = o.$$

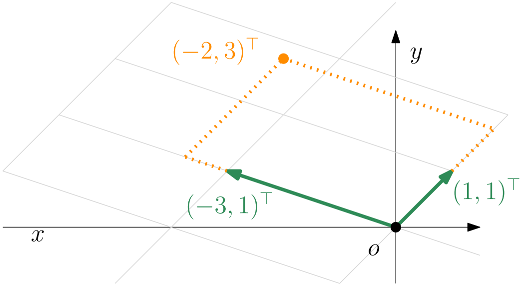
Neboli $o = \sum_{i=1}^n (\beta_i - \alpha_i) v_i$. Protože $v_1, \ldots, v_n$ jsou lineárně nezávislé, tak $\alpha_i = \beta_i$ pro každé $i = 1, \ldots, n$. $\square$

- Tyto koeficienty $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ nazýváme souřadnicemi vektoru u vzhledem k bázi B a vektor souřadnic značíme $[u]_B = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^\top$.

Příklady souřadnic

- Souřadnice vektoru $(-2,3)^\top$ vzhledem ke kanonické bázi jsou $[(-2,3)^\top]_{\mathrm{kan}} = (-2,3)^\top$. Vzhledem k bázi $B = \{(-3,1)^\top, (1,1)^\top\}$ jsou $[(-2,3)^\top]_B = (\frac{5}{4}, \frac{7}{4})^\top$.





- Pro každé $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ je $[v]_{\mathrm{kan}} = v$, protože $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$.
- Reálnými souřadnicemi lze zachytit i vektory mimo prostory $\mathbb{R}^n$:
- V prostoru $\mathcal{P}^2$ pro bázi $B = \{1, x, x^2\}$ máme $[3x^2 - 5]_B = (-5, 0, 3)^\top$.
- V každém prostoru V s bází $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ je $[v_i]_B = e_i$ pro každé i.

Vztah mezi souřadnicemi a vektory

Tvrzení

Nechť $B = \{z_1, \dots, z_n\}$ je bází konečně generovaného prostoru V nad $\mathbb{T}$. Potom pro každé $\alpha \in \mathbb{T}$ a $u, v \in V$ platí

$$[u+v]_B = [u]_B + [v]_b \qquad \text{a} \qquad [\alpha v]_B = \alpha [v]_B.$$

- Důkaz: Nechť $u = \sum_{i=1}^n \beta_i z_i$ a $v = \sum_{i=1}^n \gamma_i z_i$.
- Potom $u + v = \sum_{i=1}^n (\beta_i + \gamma_i) z_i$ a tedy

$$\begin{aligned}[u]_B + [v]_B &= (\beta_1, \dots, \beta_n)^\top + (\gamma_1, \dots, \gamma_n)^\top = (\beta_1 + \gamma_1, \dots, \beta_n + \gamma_n)^\top \\ &= [u+v]_B.\end{aligned}$$

- Podobně $\alpha v = \sum_{i=1}^n (\alpha \gamma_i) z_i$ a tedy

$$\alpha [v]_B = \alpha (\gamma_1, \dots, \gamma_n)^\top = (\alpha\gamma_1, \dots, \alpha\gamma_n)^\top = [\alpha v]_B.$$

$\square$

- Tedy souřadnice libovolné lineární kombinace vektorů jsou rovny té samé lineární kombinaci jejich souřadnic.

Existence báze

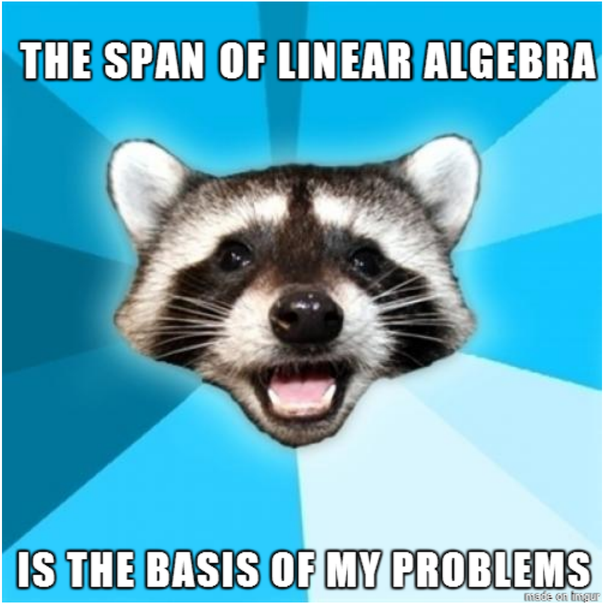
Věta o existenci báze

Každý vektorový prostor má bázi.

- Důkaz:
- Dokážeme pouze pro konečně generované vektorové prostory, jinak je důkaz složitější.
- Nechť $v_1, \dots, v_n$ je systém generátorů prostoru V.
- Jsou-li $v_1, \dots, v_n$ lineárně nezávislé, tak tvoří bázi.
- Jinak podle důsledku existuje k takové, že

$$\mathrm{span}\{v_1, \dots, v_n\} = \mathrm{span}\{v_1, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_n\}.$$

- Je-li tedy po odebrání v_k systém lineárně nezávislý, pak se jedná o bázi. Jinak postup opakujeme a jednou jistě skončíme kvůli konečnosti. $\square$



Zdroj: https://imgur.com

Děkuji za pozornost.