

Lineární algebra 1

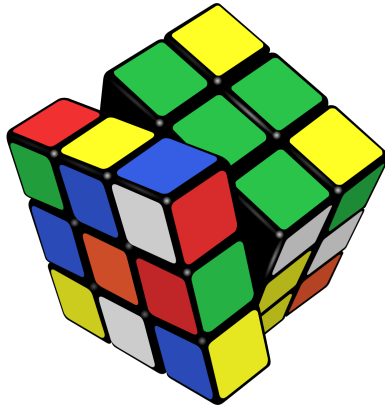
Martin Balko

4. přednáška

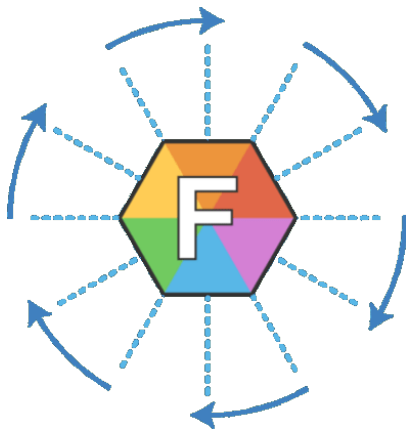
22. října 2019



Grupy



Zdroj: <https://wikipedia.org>



ROTATIONS



R0

S0



R1

S1



R2

S2



R3

S3



R4

S4



R5

S5

REFLECTIONS



Grupy

- abstraktní algebraické struktury k popisu symetrií.
- **Grupa** je dvojicí (G, \circ) , kde G je množina a $\circ: G^2 \rightarrow G$ je binární operací na množině splňující:
 - 1 $\forall a, b, c \in G: a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c,$ (asociativita)
 - 2 $\exists e \in G \forall a \in G: e \circ a = a \circ e = a,$ (neutrální prvek)
 - 3 $\forall a \in G \exists b \in G: a \circ b = b \circ a = e.$ (inverzní prvek)
- **Abelovou grupou** je grupa, která navíc splňuje:
 - 4 $\forall a \in G \forall b \in G: a \circ b = b \circ a.$ (komutativita)
- Je-li operací \circ sčítání, pak neutrální prvek značíme 0 a inverzní $-a$.
- Je-li operací \circ násobení, pak neutrální prvek značíme 1 a inverzní a^{-1} .

Příklady

- **Příklady Abelových grup:**

- 1 $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$,
- 2 $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$,
- 3 **grupa matic** $(\mathbb{R}^{m \times n}, +)$, kde neutrálním prvkem je nulová matice $m \times n$ a inverzním prvkem k matici A je matice $-A$,
- 4 **konečná grupa** $(\mathbb{Z}_m, +)$, kde $\mathbb{Z}_m = \{0, 1, \dots, m-1\}$ a sčítání $+$ se provádí modulo m . Neutrálním prvkem je 0 a inverzním prvkem k a je $-a \bmod m$.
- 5 grupa $(\{p(x) : p \text{ je polynom}\}, +)$ polynomů se sčítáním.

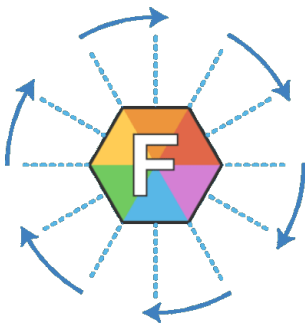
- **Příklady ne nutně Abelových grup:**

- 1 množina všech zobrazení na množině s operací skládání,
- 2 množina regulárních matic řádu n s násobením.

- **Příklady negrup:**

- 1 $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{Z}, -)$, $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, :)$.

Příklad grupy z úvodního obrázku



ROTATIONS



R0
S0



R1
S1



R2
S2



R3
S3



R4
S4



R5
S5

REFLECTIONS



Zdroj: <https://res.cloudinary.com>

Grupou symetrií hexagonu je tzv. **dihedrální grupa D6** s 12 prvky.

Základní vlastnosti grup

Tvrzení

Prvky grupy (G, \circ) splňují následující vlastnosti:

- 1 $a \circ c = b \circ c$ implikuje $a = b$, (krácení)
- 2 neutrální prvek e je určen jednoznačně,
- 3 pro každé $a \in G$ je jeho inverzní prvek určen jednoznačně,
- 4 rovnice $a \circ x = b$ má právě jedno řešení pro každé $a, b \in G$,
- 5 $(a^{-1})^{-1} = a$,
- 6 $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$.

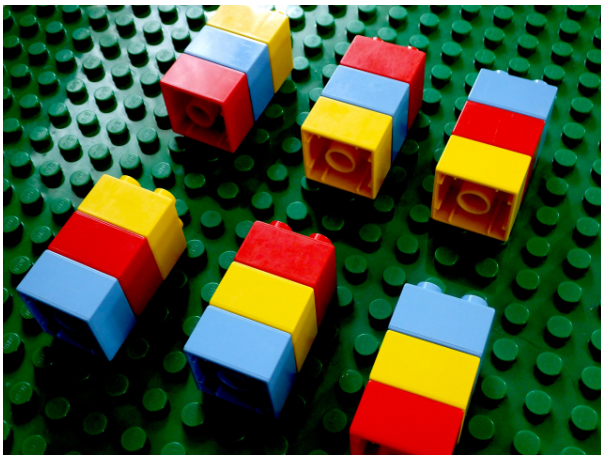
• **Důkaz** (části tvrzení):

- 1 $a \circ c = b \circ c \Rightarrow a \circ (c \circ c^{-1}) = b \circ (c \circ c^{-1}) \Rightarrow a \circ e = b \circ e \Rightarrow a = b$.
- 2 Neutrální prvky e_1 a $e_2 \Rightarrow e_1 = e_1 \circ e_2 = e_2 \Rightarrow e_1 = e_2$.
- 3 Inverzní prvky a_1 a a_2 k $a \Rightarrow a_1 \circ a = e = a_2 \circ a$ a z **krácení** $a_1 = a_2$.
- 4 Vynásobení rovnice $a \circ x = b$ prvkem a^{-1} zleva dává $x = a^{-1} \circ b$. Po dosazení je rovnost splněna. □

Podgrupy

- **Podgrupa** grupy (G, \circ) je grupa (H, \diamond) taková, že platí $H \subseteq G$ a pro všechna $a, b \in H$ platí $a \circ b = a \diamond b$.
- Neboli v H platí **uzavřenost** ($a, b \in H \Rightarrow a \circ b \in H$) a existence **neutrálního** ($e \in H$) a **inverzního** prvku ($a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$).
- Značíme $(H, \diamond) \leq (G, \circ)$.
- **Příklady.**
 - 1 **Triviální podgrupy** grupy (G, \circ) : (G, \circ) a $(\{e\}, \circ)$,
 - 2 $(\mathbb{N}, +) \not\leq (\mathbb{Z}, +) \leq (\mathbb{Q}, +) \leq (\mathbb{R}, +) \leq (\mathbb{C}, +)$,

Permutace



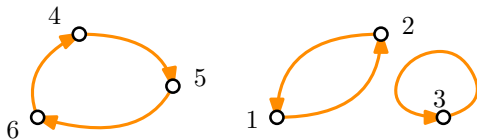
Zdroj: <https://playcuriously.wordpress.com>

Permutace

- Zobrazení je **vzájemně jednoznačné**, pokud je prosté a na.
- **Permutace** na konečné množině X je vzájemně jednoznačné zobrazení $p: X \rightarrow X$.
- S_n = množina všech permutací na $X = \{1, \dots, n\}$.
- **Možné zápisy permutací:**

① **Tabulkou** (nahore vzory, dole obrazy): $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

② **Grafem** (šipka vede ze vzoru do obrazu):



③ **Rozložením** na cykly (v závorce je obrazem prvku jeho následník):

$$p = (1, 2)(3)(4, 5, 6) = (1, 2)(4, 5, 6)$$

Operace s permutacemi

- **Identita** id je permutace, která zobrazuje každý prvek sám na sebe.
- **Transpozice** je permutace (i, j) , která prohazuje dva prvky. Tedy permutace s jedním cyklem, který má 2 prvky.
- ① **Inverzní permutace** p^{-1} k permutaci p je daná předpisem $p^{-1}(i) = j$, pokud $p(j) = i$.
 - **Příklad:** $(i, j)^{-1} = (i, j)$, $(i, j, k)^{-1} = (k, j, i)$.
- ② Pro $p, q \in S_n$ je **složená permutace** $p \circ q$ daná předpisem $(p \circ q)(i) = p(q(i))$.
 - **Příklad:** pro $p = (1, 2)$, $q = (1, 3, 2)$ je $p \circ q = (1, 3)$, $q \circ p = (2, 3)$.
 - Skládání permutací je asociativní, ale ne nutně komutativní.
 - **Příklad:** $p \circ \text{id} = p = \text{id} \circ p$, $p \circ p^{-1} = \text{id} = p^{-1} \circ p$.

Znaménko permutace

- Pokud se permutace $p \in S_n$ skládá z k cyklů, pak **znaménkem permutace** p je číslo $\text{sgn}(p) = (-1)^{n-k}$.
- **Příklad:** $\text{sgn}(\text{id}) = 1$, $\text{sgn}((i, j)) = -1$, $\text{sgn}((1, 3, 4)(2, 5)) = -1$.

Věta o znaménku složení permutace s transpozicí

Bud' $p \in S_n$ permutace a $t = (i, j) \in S_n$ transpozice. Pak

$$\text{sgn}(p) = -\text{sgn}(t \circ p) = -\text{sgn}(p \circ t).$$

- **Důkaz** (rovnosti $\text{sgn}(p) = -\text{sgn}(t \circ p)$, druhá se dokáže analogicky):
- Rozlišíme dva případy.
 - 1 i a j jsou ve stejném cyklu $(i, u_1, \dots, u_r, j, v_1, \dots, v_s)$. Pak $(i, j) \circ (i, u_1, \dots, u_r, j, v_1, \dots, v_s) = (i, u_1, \dots, u_r)(j, v_1, \dots, v_s)$ a počet cyklů se zvýší o 1.
 - 2 i a j jsou v různých cyklech (i, u_1, \dots, u_r) a (j, v_1, \dots, v_s) . Pak $(i, j) \circ (i, u_1, \dots, u_r)(j, v_1, \dots, v_s) = (i, u_1, \dots, u_r, j, v_1, \dots, v_s)$ a počet cyklů se sníží o 1.



Vlastnosti znamének permutací

Věta

Každou permutaci lze rozložit na složení transpozic.

- **Důkaz:**
- Postupně na transpozice rozložíme všechny cykly.
- Rozložení cyklu (u_1, \dots, u_r) :

$$(u_1, \dots, u_r) = (u_1, u_2) \circ (u_2, u_3) \circ \dots \circ (u_{r-1}, u_r). \quad \square$$

Důsledek 1

Platí $\text{sgn}(p) = (-1)^r$, kde r je počet transpozic v rozkladu permutace p .

Důsledek 2

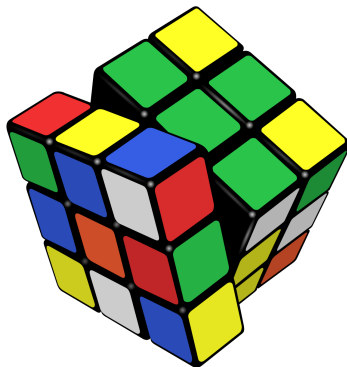
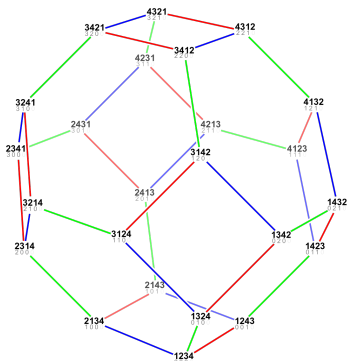
Pro $p, q \in S_n$ platí $\text{sgn}(p \circ q) = \text{sgn}(p) \cdot \text{sgn}(q)$.

Důsledek 3

Pro $p \in S_n$ platí $\text{sgn}(p) = \text{sgn}(p^{-1})$.

Symetrická grupa

- Množina permutací S_n tvoří s operací skládání \circ takzvanou **symetrickou grupu** (S_n, \circ) .



Obrázek: Reprezentace symetrické grupy S_4 a Rubikova kostka.

Zdroj: <https://wikimedia.org>

- Symetrické grupy popisují symetrie různých objektů.
- Každá grupa je isomorfní nějaké podgrupě symetrické grupy.

Algebraická tělesa



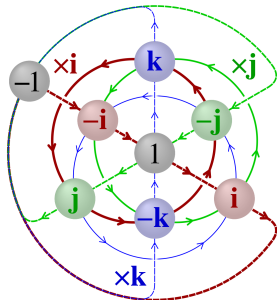
Zdroj: <https://galois.com>

Tělesa

- Jedná se **zobecnění číselných oborů** jako například \mathbb{R} .
- **Těleso** je množina \mathbb{T} spolu se dvěma komutativními binárními operacemi $+$ a \cdot splňujícími:
 - 1 $(\mathbb{T}, +)$ je Abelova grupa (neutrální prvek 0 , inverzním k a je $-a$),
 - 2 $(\mathbb{T} \setminus \{0\}, \cdot)$ je Abelova grupa (neutrální prvek 1 , inverzním k a je a^{-1}),
 - 3 $\forall a, b, c \in \mathbb{T}: a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, (distributivita).
- Operace $+$ a \cdot nemusí představovat klasické sčítání a násobení.
- Budeme psát ab namísto $a \cdot b$
- Každé těleso má aspoň dva prvky, protože $0 \neq 1$.
- Zavedeme inverzní operace $-$ a $/$ definované jako $a - b = a + (-b)$ a $a/b = ab^{-1}$.
- **Podtěleso** je podmnožina tělesa, která se stejně definovanými operacemi tvoří těleso.

Příklady

- 1 $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ s klasickými operacemi sčítání a násobení tvoří (nekonečná) tělesa,
- 2 \mathbb{Z} se sčítáním a násobením těleso netvoří (chybí inverzní prvky pro násobení),
- 3 $\{0, 1\}$ se sčítáním a násobením modulo 2 je nejmenší možné těleso,
- 4 **kvaterniony** (zobecnění komplexních čísel vzniklé přidáním dvou dalších imaginárních jednotek j a k , kde $j^2 = k^2 = -1$ a $ijk = -1$) tvoří nekomutativní těleso.



Základní vlastnosti těles

Tvrzení

Prvky tělesa splňují následující vlastnosti:

- 1 $0a = 0$.
- 2 $ab = 0$ implikuje $a = 0$ nebo $b = 0$,
- 3 $-a = (-1)a$.

• Důkaz:

1

$$0a = (0 + 0)a = 0a + 0a$$

$$(-0a) + 0a = (-0a) + 0a + 0a$$

$$0 = 0 + 0a$$

$$0 = 0a.$$

2 Pro $a = 0$ platí. Pro $a \neq 0$ vynásobením obou stran rovnice zleva prvkem a^{-1} máme $a^{-1}ab = a^{-1}0$ a podle 1) tedy $1b = 0$.

3 $0 = 0a = (1 - 1)a = 1a + (-1)a = a + (-1)a$, tedy $-a = (-1)a$. □

The Periodic Table Of Finite Simple Groups

6, C ₂ , Z ₃		Dynkin Diagrams of Simple Lie Algebras										C ₂								
1												2								
A ₄ (4), A ₅ (5)	A ₆ (2)											C ₃								
A ₅	A ₁ (7)											C ₅								
60	360											3								
A ₆ (6), A ₇ (7)	² A ₅ (2) ²											C ₇								
A ₆	A ₁ (8)											5								
360	504											7								
A ₇	A ₁ (11)	E ₆ (2)	E ₇ (2)	E ₈ (2)	F ₄ (2)	G ₂ (3)	³ D ₄ (2 ³)	² E ₆ (2 ²)	² B ₂ (2 ⁵)	Tw ⁺	² F ₄ (2) ⁺	² G ₂ (3 ³)	B ₃ (2)	C ₄ (3)	D ₃ (2)	² D ₄ (2 ²)	² A ₂ (2) ²	G ₂ (2) ²	² A ₂ (9)	C ₉
2320	660	234661379322	1046535802080	1046535802080	1311126	42431056	211363312	76362479463	776303103360	29128	173751208	1667344476	3423320	6776476	6304940	2149920394368	2246317933048	1261080	6480	C ₇
A ₈ (2)	A ₁ (13)	E ₆ (3)	E ₇ (3)	E ₈ (3)	F ₄ (3)	G ₂ (4)	³ D ₄ (3 ³)	² E ₆ (3 ²)	² B ₂ (2 ⁵)	² F ₄ (2 ²)	² G ₂ (3 ⁵)	B ₂ (5)	C ₃ (7)	D ₃ (5)	² D ₄ (4 ²)	² A ₂ (4)	² A ₂ (9)	C ₁₁		
30160	1305	12745472728	12745472728	12745472728	373632078080	47536676160	251956480	3036603136631	32357480	268305331696	6343167	6400500	17540728	811130880	4739447	9990000	3268920	3268920	C ₁₁	
A ₉	A ₁ (17)	E ₆ (4)	E ₇ (4)	E ₈ (4)	F ₄ (4)	G ₂ (5)	³ D ₄ (4 ³)	² E ₆ (4 ²)	² B ₂ (2 ⁵)	² F ₄ (2 ³)	² G ₂ (3 ⁷)	B ₂ (7)	C ₃ (9)	D ₃ (3)	² D ₄ (5 ²)	² A ₂ (64)	C ₁₃			
135440	2448	1046535802080	1046535802080	1046535802080	16884031648640	67402208	3439348800	47402208	3439348800	1281089328	1281089328	3440373462	3440373462	1281089328	17400200208	300200000	5213776	5213776	C ₁₃	
A ₁₀	A _n (q)	E ₆ (q)	E ₇ (q)	E ₈ (q)	F ₄ (q)	G ₂ (q)	³ D ₄ (q ³)	² E ₆ (q ²)	¹ B ₂ (2 ⁿ⁺¹)	¹ F ₄ (2 ⁿ⁺¹)	¹ G ₂ (3 ⁿ⁺¹)	B _n (q)	C _n (q)	D _n (q)	² D _n (q ²)	² A _n (q ²)	C _p			
$\frac{q^{n+1}-q}{q-1}$	$\frac{q^{n+1}-q}{q-1}$	$\frac{q^{n+1}-q}{q-1}$	$\frac{q^{n+1}-q}{q-1}$	$\frac{q^{n+1}-q}{q-1}$	$\frac{q^{n+1}-q}{q-1}$	$\frac{q^{n+1}-q}{q-1}$	$\frac{q^{n+1}-q}{q-1}$	$\frac{q^{n+1}-q}{q-1}$	$\frac{q^{n+1}-q}{q-1}$	$\frac{q^{n+1}-q}{q-1}$	$\frac{q^{n+1}-q}{q-1}$	$\frac{q^{n+1}-q}{q-1}$	$\frac{q^{n+1}-q}{q-1}$	$\frac{q^{n+1}-q}{q-1}$	$\frac{q^{n+1}-q}{q-1}$	$\frac{q^{n+1}-q}{q-1}$	$\frac{q^{n+1}-q}{q-1}$	$\frac{q^{n+1}-q}{q-1}$	$\frac{q^{n+1}-q}{q-1}$	$\frac{q^{n+1}-q}{q-1}$

Alternating Groups	Classical Chevalley Groups	Chevalley Groups	Classical Steinberg Groups	Steinberg Groups	Suzuki Groups	Twisted Groups and Tits Groups*	Sporadic Groups	Cyclic Groups
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Alternating*	Symbol	Order																								
M ₁₁	M ₁₂	M ₂₂	M ₂₃	M ₂₄	J ₁ , J ₁ (11)	J ₂	M ₁₃	M ₁₄	M ₁₅	M ₁₆	M ₁₇	M ₁₈	M ₁₉	M ₂₀	M ₂₁	M ₂₂	M ₂₃	M ₂₄	M ₂₅	M ₂₆	M ₂₇	M ₂₈	M ₂₉	M ₃₀	M ₃₁	M ₃₂
7920	95040	443520	10200960	244823040	175560	668400	50252160	877963680	44352000	99812160	107107200	107107200	107107200	107107200	107107200	107107200	107107200	107107200	107107200	107107200	107107200	107107200	107107200	107107200	107107200	107107200

Suz	PSU ₃ (Q=3)	³ D ₄	² F ₄	² G ₂	² A ₂	² A ₂	² A ₂	² A ₂	² A ₂	² A ₂	² A ₂	² A ₂	² A ₂	² A ₂	² A ₂	² A ₂	² A ₂	² A ₂	² A ₂	² A ₂	² A ₂	² A ₂	² A ₂	² A ₂	² A ₂	² A ₂
6034054080	6034054080	4957680000	423054233280	419779360	419779360	419779360	419779360	419779360	419779360	419779360	419779360	419779360	419779360	419779360	419779360	419779360	419779360	419779360	419779360	419779360	419779360	419779360	419779360	419779360	419779360	419779360

Obrázek: **Klasifikace jednoduchých konečných grup** (jeden z nejrozsáhlejších projektů dějin matematiky). Všimněte si tzv. Monster grupy.

Zdroj: <https://cabinetmagazine.org>

Děkuji za pozornost.