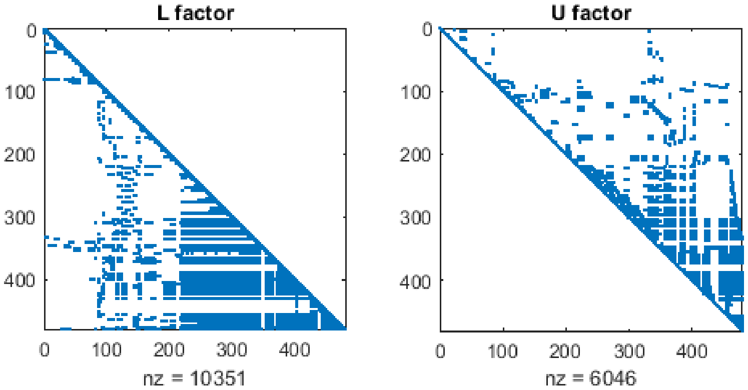
Lineární algebra 1

Martin Balko

13. přednáška

7. ledna 2021

LU rozklad



Zdroj: https://mathworks.com/

LU rozklad

- LU rozklad matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je rozklad na součin $A = LU$, kde L je dolní trojúhelníková matice s jedničkami na diagonále a U horní trojúhelníková matice.
- Příklad:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 7 \\ -6 & -2 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = LU.$$

- Slouží k usnadnění výpočtů.
- LU rozklad úzce souvisí s odstupňovaným tvarem matice A. Matice U odpovídá odstupňovanému tvaru matice A. Matice L představuje akumulované elementární úpravy.

LU rozklad a elementární řádkové úpravy

- Nechť při převodu matice A na odstupňovaný tvar U z elementárních úprav používáme pouze přičtení α násobku řádku i k nějakému řádku j pod ním (tedy bez prohazování řádků).
- Matice $E_{i,j}(\alpha)$ těchto úprav je dolní trojúhelníková:

$$E_{i,j}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & \ddots & \vdots \\ & \alpha & & \ddots & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

  a její inverz $E_{i,j}(\alpha)^{-1} = E_{i,j}(-\alpha)$ taky.
- Součinem dolních trojúhelníkových matic je dolní trojúhelníková matice a tedy při (tomto speciálním) převodu $E_k \cdots E_1 A = U$ dostáváme matici L jako $L = E_1^{-1} \cdots E_k^{-1}$.

Algoritmus získání LU rozkladu

- Matice L a U jde udržovat v jedné matici. Asymptotická složitost LU rozkladu je pak stejná jako složitost výpočtu REF tvaru, tedy $\frac{2}{3}n^3$.
- Stačí při převodu na odstupňovaný tvar pod diagonálu namísto nul psát hodnoty $-\alpha$ na pozici (j, i) při použití úpravy $E_{i,j}(\alpha)$.
- Příklad (hodnoty α jsou fialové):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 7 \\ -6 & -2 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -6 & -2 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 7 \\ -6 & -2 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = LU.$$

Co prohazování řádků?

- Algoritmus se dá adaptovat i na případ, když při elementárních úpravách musíme někde prohodit řádky.
- Bez prohazování řádků LU rozklad neexistuje vždy, například pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Po vhodném prohození řádků už LU rozklad vždy existuje.

Tvrzení

Každá matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jde rozložit na tvar $PA = LU$, kde $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je permutační matice, $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je dolní trojúhelníková matice s jedničkami na diagonále a $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ horní trojúhelníková matice.

- Matice $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je permutační maticí, pokud existuje permutace $p \in S_n$ taková, že $P_{i,j} = 1$, pokud $p(i) = j$ a $P_{i,j} = 0$ jinak.

Důkaz tvrzení o prohazování řádků u LU rozkladu

- Nechť matice A je upravena na tvar $E_\ell \cdots E_1 A$ pomocí ℓ elementárních úprav přičtení násobku řádku k nějakému pod ním. Nechť $E_\ell = E_{p,q}(\alpha)$. Nechť nyní potřebujeme prohodit řádky i a j s $i < j$, což je reprezentováno maticí $E_{i,j}$. Potom nutně $q < i$.
- Pokud $\{i, j\} \cap \{p, q\} = \emptyset$, pak $E_{i,j} E_{p,q}(\alpha) = E_{p,q}(\alpha) E_{i,j}$.
- Jinak $p \in \{i, j\}$ a pro $p = i$ máme $E_{i,j} E_{p,q}(\alpha) = E_{j,q}(\alpha) E_{i,j}$. Pro $p = j$ analogicky $E_{i,j} E_{p,q}(\alpha) = E_{i,q}(\alpha) E_{i,j}$.
- Tedy lze psát $E_{i,j} E_\ell = E'_\ell E_{i,j}$, kde E'_ℓ je matice elementární úpravy přičtení násobku řádku k nějakému pod ním. Nakonec tak přepíšeme

$$E_{i,j} E_\ell \cdots E_1 A = E'_\ell \cdots E'_1 E_{i,j} A.$$

- Tento postup lze aplikovat pokaždé, když musíme vyměnit dva řádky. Takže po upravení na odstupňovaný tvar U máme $E'_k \cdots E'_1 E_{i_1,j_1} \cdots E_{i_r,j_r} A = U$. Tedy $PA = LU$, kde $L = (E'_k \cdots E'_1)^{-1}$ je dolní trojúhelníková matice s jedničkami na diagonále a $P = E_{i_1,j_1} \cdots E_{i_r,j_r}$ je permutační maticí. $\square$

Použití LU rozkladu

- LU rozklad „předzpracuje“ matici A, aby výpočty s ní byly jednodušší.
- Má uplatnění například počítání determinantu $\det(A) = \det(L)\det(U)$ nebo pro řešení soustav rovnic.
- Použití LU rozkladu pro řešení soustavy $Ax = b$:
  1. Najdi LU rozklad $A = LU$,
  2. vyřeš soustavu $Ly = b$ dopřednou substitucí,
  3. vyřeš soustavu $Ux = y$ zpětnou substitucí.
- Příklad:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 7 & 5 \\ -6 & -2 & -12 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ -3 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right) \to y = (-1, 7, 2)^\top$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right) \to x = (5, -8, -1)^\top.$$

- Kroky 2 a 3 stačí použít pro různá b, čímž se dá snadno spočítat A^{-1}, stačí vzít jako pravé strany $e_1, \ldots, e_n$ a jako proměnné sloupce A^{-1}.

Numerická stabilita při řešení soustav, iterativní metody

Zdroj: https://sebastianraschka.com/

Numerická stabilita při řešení soustav

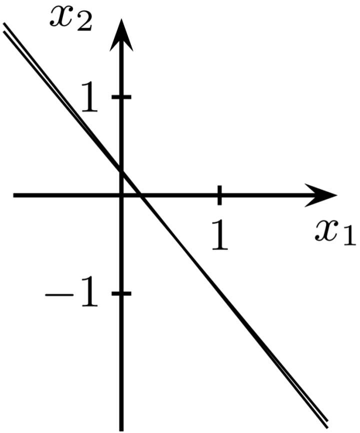
- Při numerickém řešení na počítačích dochází k zaokrouhlovacím chybám a vypočtený výsledek se může diametrálně lišit od správného řešení.
- To nastává hlavně u špatně podmíněných matic. Ty mají blízko k singulární matici a dochází u nich k amplifikaci zaokrouhlovacích chyb.
- Příklad špatně podmíněných matic:
    - Tyto dvě soustavy se liší jen zaokrouhlením $\frac{1}{15}$ na 3 desetinná místa:

$$\begin{aligned} 0,835x_1 + 0,667x_2 &= 0,168, \\ 0,333x_1 + 0,266x_2 &= \mathbf{0,067} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 0,835x_1 + 0,667x_2 &= 0,168, \\ 0,333x_1 + 0,266x_2 &= \mathbf{0,066} \end{aligned}$$

První soustava má řešení $(x_1', x_2') = (-1, 1)$, zatímco druhá má řešení $(x_1'', x_2'') = (-666, 834)$.

Špatná podmíněnost geometricky

- Geometrickou představou je zde průsečík dvou téměř identických přímek, takže malá změna v datech znamená potenciálně velkou změnu v průsečíku.



Jiný příklad špatně podmíněných matic

- Hilbertova matice H_n řádu n je definována předpisem $(H_n)_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}$ pro každé $i, j = 1, \ldots, n$.
- Příklad:

$$H_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}$$

- Potom soustava $H_n x = b$, kde $b = H_n e$ pro $e = (1, \ldots, 1)^\top$ má jako (jediné) řešení evidentně $x = e$.
- Výpočty v Matlabu ovšem při přesnosti 52 bitů (tedy zhruba 10^{-16}) ukázaly následující řešení:

n	rozsah složek řešení
8	$x_i = 1$
10	$x_i \in [0,9997, 1,0003]$
12	$x_i \in [0,7000, 1,2555]$
14	$x_i \in [-5,5807, 6,6260]$

Výpočty nad špatně podmíněnými maticemi

- Gaussova eliminace předvedená na přednášce je na zaokrouhlovací chyby citlivá, ale existují stabilnější metody.
- Parciální pivotizace často vede k přesnějšímu řešení. Připomenutí: v algoritmu $REF(A)$ se jedná o volbu indexu k takového, že $a_{k,j} \neq 0$, $k \geq i$ a $|a_{k,j}|$ má maximální absolutní hodnotu.
- Příklad: Řešme soustavu na 3 platné číslice (řešením je $\left(\frac{1000}{2001}, -\frac{2000}{2001}\right)^\top$):

$$
\begin{aligned}
10^{-3}x_1 - x_2 &= 1,\\
2x_1 + x_2 &= 0.
\end{aligned}
$$

Výpočet bez parciální pivotizace:

$$
\left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{10^{-3}} & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & -1000 & 1000 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1000 & 1000 \\ 0 & \mathbf{2000} & -2000 \end{array}\right)
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1000 & 1000 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \to (0, -1)^\top
$$

Výpočet s parciální pivotizací:

$$
\left(\begin{array}{cc|c} 10^{-3} & -1 & 1 \\ \mathbf{2} & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{2} & 1 & 0 \\ 10^{-3} & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \mathbf{1} & -1 \end{array}\right) \to \left(\frac{1}{2}, -1\right)^\top
$$

Iterativní metody

- Některé praktické úlohy vedou na velké, ale řídké, soustavy. Například soustavy řádu $n = 10^7$, kde každý řádek má nanejvýš $k = 10$ nenulových hodnot.
- Gaussova eliminace není vhodnou metodou na řešení takových úloh, protože matici A zahustí, neboli výrazně vzroste podíl nenulových prvků.
- Iterativní metody jsou zde výhodnější.
  - Od počátečního vektoru postupně konvergují k řešení soustavy.
  - Výhody: menší citlivost k zaokrouhlovacím chybám, menší časové a paměťové nároky pro velké a řídké soustavy.
- Ukážeme si Gaussovu–Seidelovu metodu.
  - Nekonverguje k řešení vždycky, jen pro určité třídy matic. Například, když v každém řádku je diagonální prvek větší než součet absolutních hodnot zbývajících prvků.
  - Vyžaduje pouze řádově $2kn$ aritmetických operací na jednu iteraci.

Gaussova–Seidelova metoda

- Ukážeme ji na konkrétním soustavě:

$$\begin{aligned} 6x + 2y - z &= 4 \\ x + 5y + z &= 3 \\ 2x + y + 4z &= 27. \end{aligned}$$

Po přepsání máme

$$\begin{aligned} x &= (4 - 2y + z)/6 \\ y &= (3 - x - z)/5 \\ z &= (27 - 2x - y)/4. \end{aligned}$$

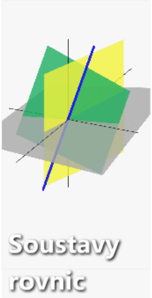
- Zvolme $x^{(0)} = y^{(0)} = z^{(0)} = 1$ a poté pro $i \geq 1$ položme

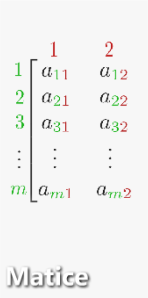
$$\begin{aligned} x^{(i)} &= (4 - 2y^{(i-1)} + z^{(i-1)})/6 \\ y^{(i)} &= (3 - x^{(i-1)} - z^{(i-1)})/5 \\ z^{(i)} &= (27 - 2x^{(i-1)} - y^{(i-1)})/4. \end{aligned}$$

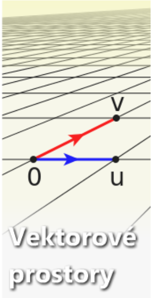
- Již po šesti iteracích dostáváme $(1,999624, -0,999895, 6,000212)^\top$, což je velmi blízko skutečnému řešení $(2, -1, 6)^\top$

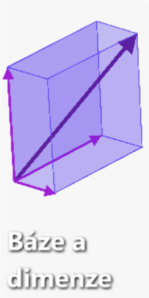
Zkoušky

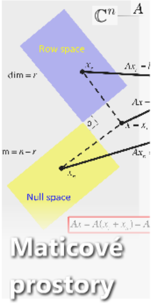
- Průběh zkoušky:
  - Ústní s písemnou přípravou. Maximálně na 4 hodiny (09:00–13:00 nebo 14:00–18:00).
  - výběr tématu a poté otázky z něj (přehledový výčet, vybraný důkaz a otázka na ano/ne na konkrétním příkladě).
- Termíny (další přibydou):
  - 14.1. – dopoledne + odpoledne
  - 18.1. – dopoledne + odpoledne
  - 21.1. – dopoledne + odpoledne
  - 28.1. – dopoledne + odpoledne
  - 4.2. – dopoledne + odpoledne
  - 11.2. – dopoledne + odpoledne
- Distanční zkoušky jen v krajních případech.
- Rozsah: vše, co jsme probrali (viz rozpis jednotlivých přednášek).

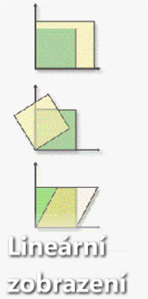


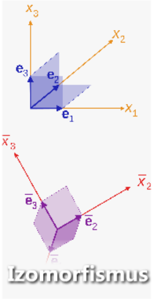


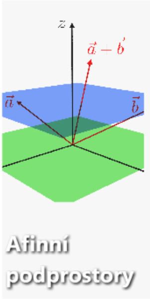


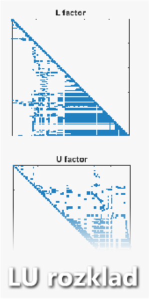












Děkuji za pozornost a hodně štěstí u zkoušek.