Kombinatorika a grafy I — 13. domácí úkol*

23. května 2019

Nezapomeňte svá řešení podepsat. U prvního odevzdaného řešení uveďte i přezdívku, pod kterou budete mít uveřejněny získané body na stránkách cvičení. **Termín odevzdání** je 30. června.

Příklad 1. *Zformulujte a dokažte variantu Ušatého lemma pro hranovou 2-souvislost.* **[3]**

Příklad 2. *Dokažte, že v hranově 2-souvislém grafu leží každý vrchol na nějaké kružnici.* **[2]**

Příklad 3. *Určete počet perfektních párování v úplném bipartitním grafu $K_{n,n}$, ve kterém odstraníme n disjunktních hran.* **[3]**

Příklad 4. *V USA mají mince těchto typů: 1, 5, 10, 25, 50 centy a \$1. Nalezněte vytvořující funkci $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, kde a_i je počt způsobů, kolika se dá americkými mincemi zaplatit i centů.* **[3]**

Příklad 5 (*). *Pro $n \times n$ matici $A = (a_{ij})$ definujeme* permanent matice *A jako*

$$\mathrm{per}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}.$$

(a) Buď G bipartitní graf s partitami $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ a $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ a nechť $a_{ij} = 1$, pokud $\{u_i, v_j\} \in E(G)$ a $a_{ij} = 0$ jinak. Ukažte, že počet perfektních párování v G je $\mathrm{per}(A)$, kde $A = (a_{ij})$. **[3]**

(b) Nechť $A = (a_{ij})$ je nezáporná $n \times n$ matice, ve které se všechny řádkové a sloupcové součty rovnají jedné (tzv. dvojitě stochastická matice*). Ukažte, že $\mathrm{per}(A) > 0$.* **[5]**

Příklad 6. *Eukleidovská Ramseyova teorie.*

(a) Uvažme obarvení bodů roviny $\mathbb{R}^2$ třemi barvami. Ukažte, že potom vždy dokážeme nalézt dva body stejné barvy, které jsou od sebe ve vzdálenosti jedna. **[3]**

(b) Ukažte, že existuje 2-obarvení bodů roviny, ve kterém není jednobarevný rovnostranný trojúhelník s hranami jednotkové délky. **[3]**

---

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/