Kombinatorika a grafy I

Martin Balko

7. přednáška

2. dubna 2019

Aplikace toků v sítích

Připomenutí z minula I

Připomenutí z minula I

- Síť je čtveřice (G, z, s, c), kde $G = (V, E)$ je orientovaný graf, $z \in V$ je zdroj, $s \in V$ je stok a $c\colon E \to \mathbb{R}_0^+$ jsou kapacity hran.

Připomenutí z minula I

- Síť je čtveřice (G, z, s, c), kde $G = (V, E)$ je orientovaný graf, $z \in V$ je zdroj, $s \in V$ je stok a $c\colon E \to \mathbb{R}_0^+$ jsou kapacity hran.
- Tok je zobrazení $f\colon E \to \mathbb{R}_0^+$ splňující $0 \leq f(e) \leq c(e)$ pro každé $e \in E$ a $\sum_{v:(u,v)\in E} f(u,v) = \sum_{v:(v,u)\in E} f(v,u)$ pro každé $u \in V \setminus \{z, s\}$.

Připomenutí z minula I

- Síť je čtveřice (G, z, s, c), kde $G = (V, E)$ je orientovaný graf, $z \in V$ je zdroj, $s \in V$ je stok a $c\colon E \to \mathbb{R}_0^+$ jsou kapacity hran.
- Tok je zobrazení $f\colon E \to \mathbb{R}_0^+$ splňující $0 \leq f(e) \leq c(e)$ pro každé $e \in E$ a $\sum_{v:(u,v)\in E} f(u, v) = \sum_{v:(v,u)\in E} f(v, u)$ pro každé $u \in V \setminus \{z, s\}$.
- Velikost toku f je $w(f) = \sum_{v:(z,v)\in E} f(z, v) - \sum_{v:(v,z)\in E} f(v, z)$.

Připomenutí z minula I

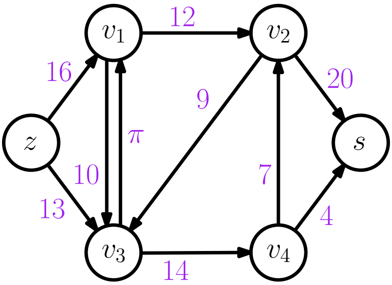
- Síť je čtveřice (G, z, s, c), kde $G = (V, E)$ je orientovaný graf, $z \in V$ je zdroj, $s \in V$ je stok a $c \colon E \to \mathbb{R}_0^+$ jsou kapacity hran.
- Tok je zobrazení $f \colon E \to \mathbb{R}_0^+$ splňující $0 \leq f(e) \leq c(e)$ pro každé $e \in E$ a $\sum_{v:(u,v)\in E} f(u, v) = \sum_{v:(v,u)\in E} f(v, u)$ pro každé $u \in V \setminus \{z, s\}$.
- Velikost toku f je $w(f) = \sum_{v:(z,v)\in E} f(z, v) - \sum_{v:(v,z)\in E} f(v, z)$.
- Řez R je podmnožina E zasahující do každé orientované cesty ze z do s.

Připomenutí z minula I

- Síť je čtveřice (G, z, s, c), kde $G = (V, E)$ je orientovaný graf, $z \in V$ je zdroj, $s \in V$ je stok a $c\colon E \to \mathbb{R}_0^+$ jsou kapacity hran.
- Tok je zobrazení $f\colon E \to \mathbb{R}_0^+$ splňující $0 \le f(e) \le c(e)$ pro každé $e \in E$ a $\sum_{v:(u,v)\in E} f(u,v) = \sum_{v:(v,u)\in E} f(v,u)$ pro každé $u \in V \setminus \{z, s\}$.
- Velikost toku f je $w(f) = \sum_{v:(z,v)\in E} f(z,v) - \sum_{v:(v,z)\in E} f(v,z)$.
- Řez R je podmnožina E zasahující do každé orientované cesty ze z do s.
- Kapacita řezu R je $c(R) = \sum_{e\in R} c(e)$.

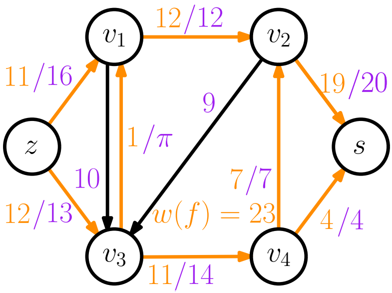
Připomenutí z minula I

- Síť je čtveřice (G, z, s, c), kde $G = (V, E)$ je orientovaný graf, $z \in V$ je zdroj, $s \in V$ je stok a $c\colon E \to \mathbb{R}_0^+$ jsou kapacity hran.
- Tok je zobrazení $f\colon E \to \mathbb{R}_0^+$ splňující $0 \leq f(e) \leq c(e)$ pro každé $e \in E$ a $\sum_{v:(u,v)\in E} f(u,v) = \sum_{v:(v,u)\in E} f(v,u)$ pro každé $u \in V \setminus \{z, s\}$.
- Velikost toku f je $w(f) = \sum_{v:(z,v)\in E} f(z,v) - \sum_{v:(v,z)\in E} f(v,z)$.
- Řez R je podmnožina E zasahující do každé orientované cesty ze z do s.
- Kapacita řezu R je $c(R) = \sum_{e\in R} c(e)$.



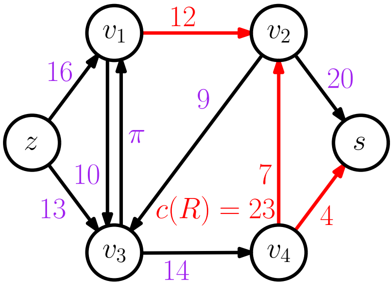
Připomenutí z minula I

- Síť je čtveřice (G, z, s, c), kde $G = (V, E)$ je orientovaný graf, $z \in V$ je zdroj, $s \in V$ je stok a $c\colon E \to \mathbb{R}_0^+$ jsou kapacity hran.
- Tok je zobrazení $f\colon E \to \mathbb{R}_0^+$ splňující $0 \le f(e) \le c(e)$ pro každé $e \in E$ a $\sum_{v:(u,v)\in E} f(u,v) = \sum_{v:(v,u)\in E} f(v,u)$ pro každé $u \in V \setminus \{z, s\}$.
- Velikost toku f je $w(f) = \sum_{v:(z,v)\in E} f(z,v) - \sum_{v:(v,z)\in E} f(v,z)$.
- Řez R je podmnožina E zasahující do každé orientované cesty ze z do s.
- Kapacita řezu R je $c(R) = \sum_{e\in R} c(e)$.



Připomenutí z minula I

- Síť je čtveřice (G, z, s, c), kde $G = (V, E)$ je orientovaný graf, $z \in V$ je zdroj, $s \in V$ je stok a $c \colon E \to \mathbb{R}_0^+$ jsou kapacity hran.
- Tok je zobrazení $f \colon E \to \mathbb{R}_0^+$ splňující $0 \leq f(e) \leq c(e)$ pro každé $e \in E$ a $\sum_{v:(u,v)\in E} f(u,v) = \sum_{v:(v,u)\in E} f(v,u)$ pro každé $u \in V \setminus \{z, s\}$.
- Velikost toku f je $w(f) = \sum_{v:(z,v)\in E} f(z,v) - \sum_{v:(v,z)\in E} f(v,z)$.
- Řez R je podmnožina E zasahující do každé orientované cesty ze z do s.
- Kapacita řezu R je $c(R) = \sum_{e\in R} c(e)$.



Připomenutí z minula II

Připomenutí z minula II

Věta 1 (Hlavní věta o tocích)

V každé síti existuje maximální tok a jeho velikost se rovná kapacitě minimálního řezu.

Připomenutí z minula II

Věta 1 (Hlavní věta o tocích)

V každé síti existuje maximální tok a jeho velikost se rovná kapacitě minimálního řezu.

- Máme Fordův–Fulkersonův algoritmus na nalezení maximálního toku:

Připomenutí z minula II

Věta 1 (Hlavní věta o tocích)

V každé síti existuje maximální tok a jeho velikost se rovná kapacitě minimálního řezu.

- Máme Fordův–Fulkersonův algoritmus na nalezení maximálního toku:
  - Začni s nulovým tokem a dokud existuje cesta P ze z do s, kde
$$\varepsilon_P = \min_{e \in E(P)} \begin{cases} c(e) - f(e) & e \text{ je dopředná hrana v } P, \\ f(e) & e \text{ je zpětná hrana v } P \end{cases}$$
    je kladné, tak zvyš tok o ε_P po dopředných hranách z P a sniž jej o ε_P po zpětných hranách z P.
  - Poté vrať aktuální tok (ten už bude mít maximální velikost).

Připomenutí z minula II

Věta 1 (Hlavní věta o tocích)

V každé síti existuje maximální tok a jeho velikost se rovná kapacitě minimálního řezu.

- Máme Fordův–Fulkersonův algoritmus na nalezení maximálního toku:
  - Začni s nulovým tokem a dokud existuje cesta P ze z do s, kde

$$\varepsilon_P = \min_{e \in E(P)} \begin{cases} c(e) - f(e) & e \text{ je dopředná hrana v } P, \\ f(e) & e \text{ je zpětná hrana v } P \end{cases}$$

    je kladné, tak zvyš tok o ε_P po dopředných hranách z P a sniž jej o ε_P po zpětných hranách z P.
  - Poté vrať aktuální tok (ten už bude mít maximální velikost).

Věta 2 (Věta o celočíselnosti)

V každé síti s celočíselnými kapacitami Fordův–Fulkersonův algoritmus najde po konečně mnoha krocích tok maximální velikosti a ta je celočíselná.

Kőnigova–Egerváryho věta

Kőnigova–Egerváryho věta

Věta 3 (Kőnigova–Egerváryho věta, 1931)

V každém bipartitním grafu je velikost minimálního vrcholového pokrytí rovna velikosti maximálního párování.

Kőnigova–Egerváryho věta

Věta 3 (Kőnigova–Egerváryho věta, 1931)

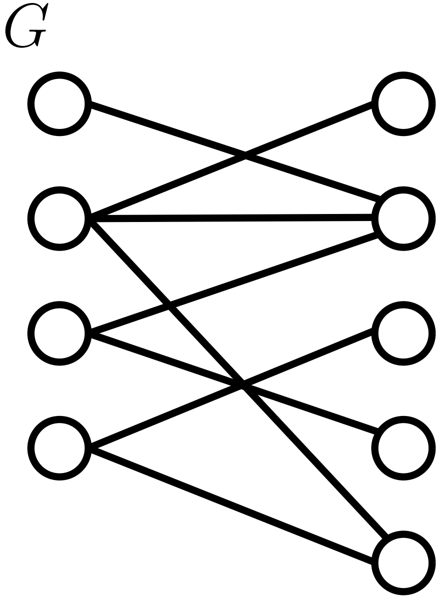
V každém bipartitním grafu je velikost minimálního vrcholového pokrytí rovna velikosti maximálního párování.

Obrázek: Dénes Kőnig (1884–1944) a Jenő Egerváry (1891–1958).

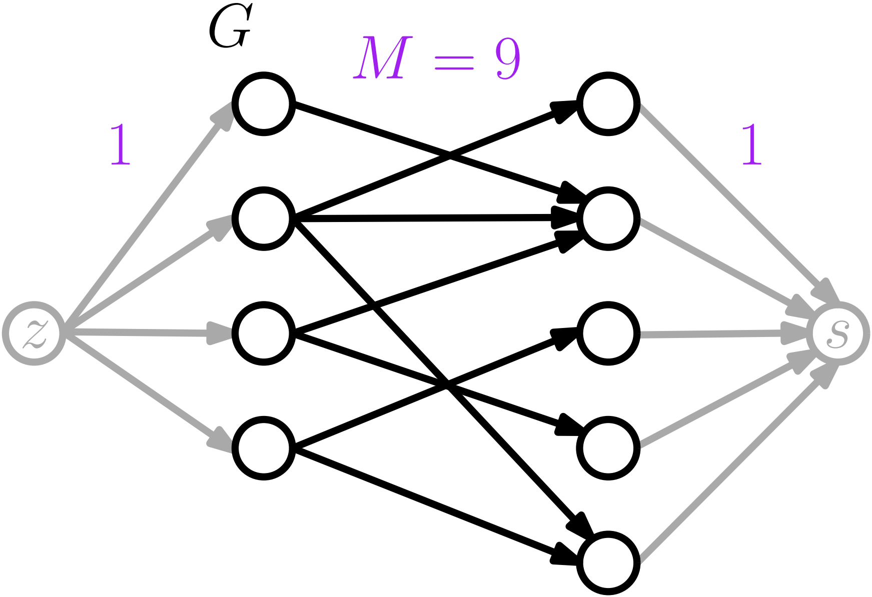
Zdroj: http://en.wikipedia.org

Kőnigova–Egerváryho věta: příklad

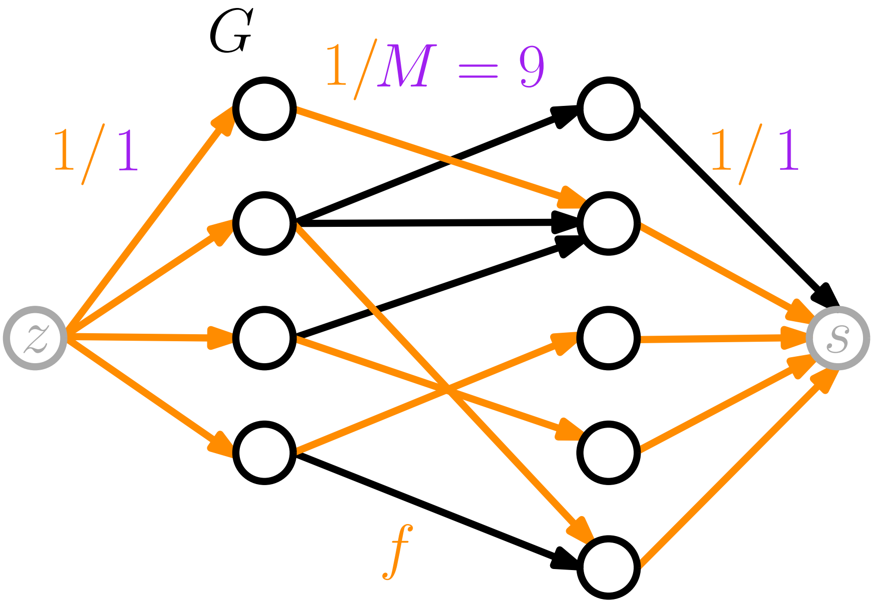
Kőnigova–Egerváryho věta: příklad



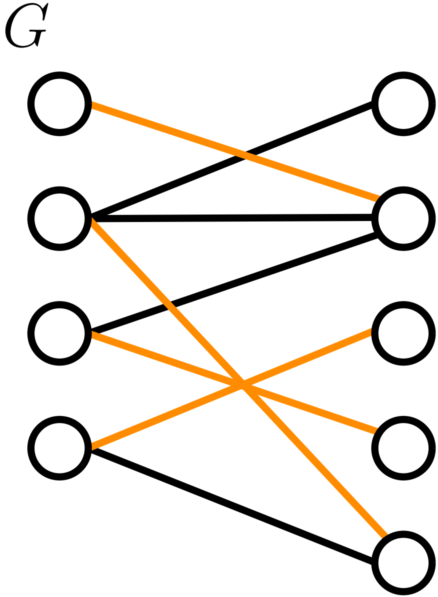
Kőnigova–Egerváryho věta: příklad



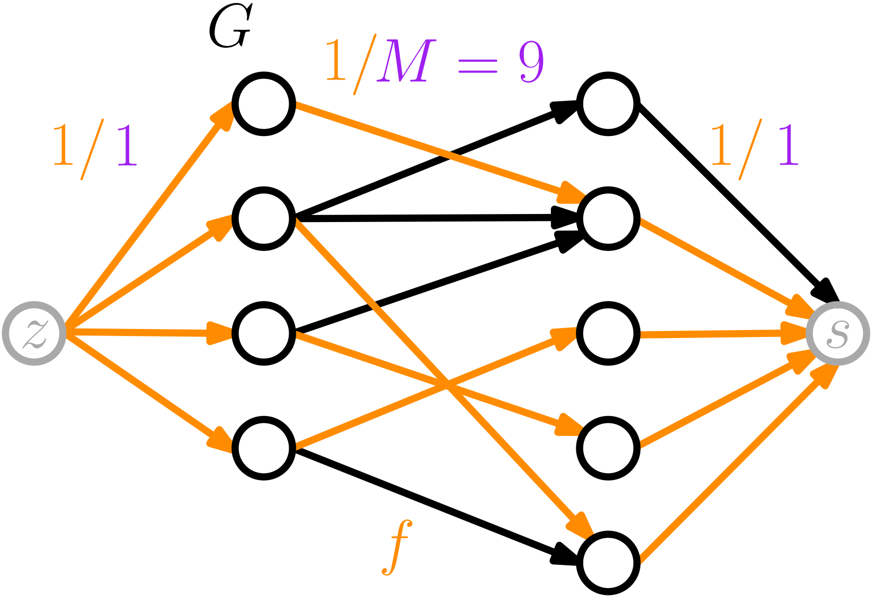
Kőnigova–Egerváryho věta: příklad



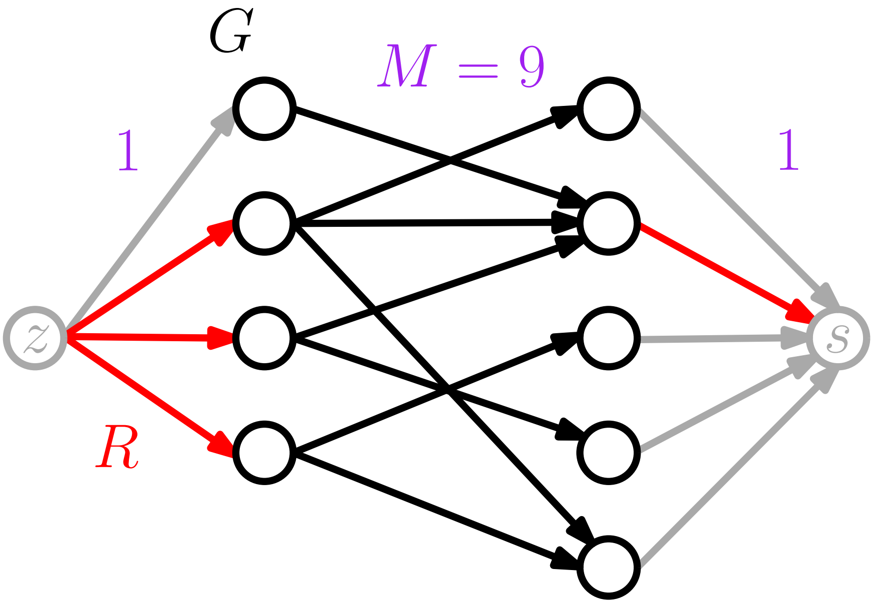
Kőnigova–Egerváryho věta: příklad



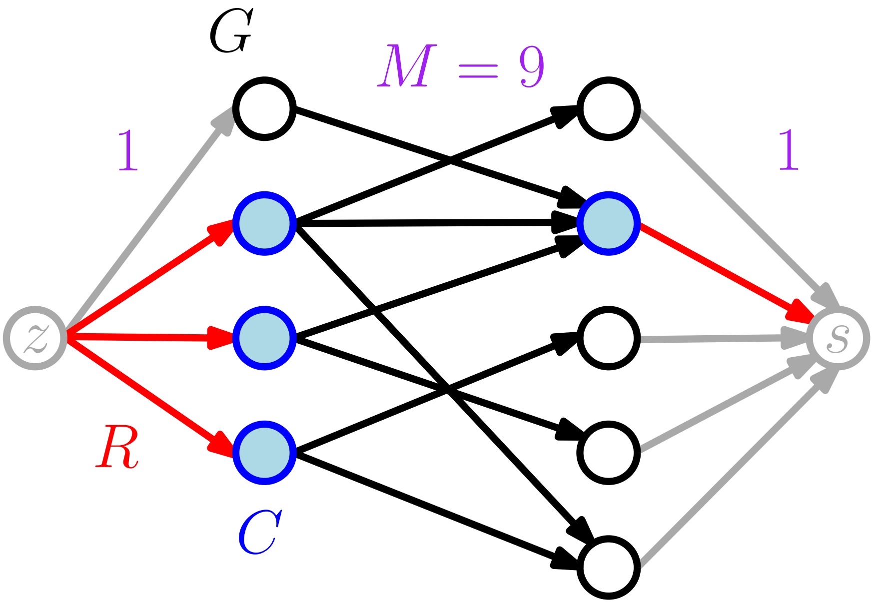
Kőnigova–Egerváryho věta: příklad



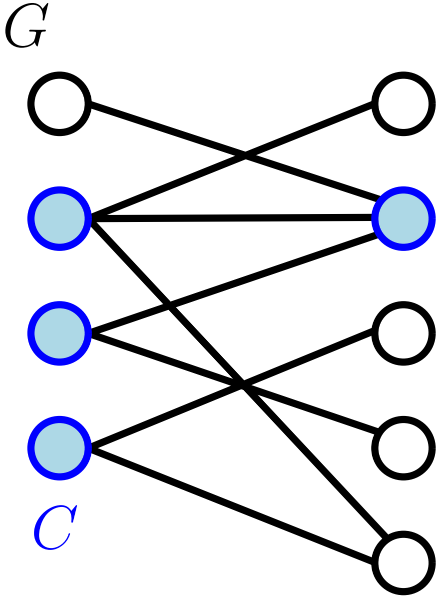
Kőnigova–Egerváryho věta: příklad



Kőnigova–Egerváryho věta: příklad



Kőnigova–Egerváryho věta: příklad



Hallova věta

Hallova věta

Věta 4 (Hallova věta, 1935)

Množinový systém $(M_i : i \in I)$ má systém různých reprezentantů právě tehdy, když pro každé $J \subseteq I$ platí $|\cup_{j\in J} M_j| \geq |J|$.

Hallova věta

Věta 4 (Hallova věta, 1935)

Množinový systém $(M_i : i \in I)$ má systém různých reprezentantů právě tehdy, když pro každé $J \subseteq I$ platí $|\cup_{j \in J} M_j| \geq |J|$.

Obrázek: Philip Hall (1904–1982).

Zdroj: http://en.wikipedia.org

Hallova věta

Věta 4 (Hallova věta, 1935)

Množinový systém $(M_i : i \in I)$ má systém různých reprezentantů právě tehdy, když pro každé $J \subseteq I$ platí $|\cup_{j \in J} M_j| \geq |J|$.

Obrázek: Philip Hall (1904–1982).

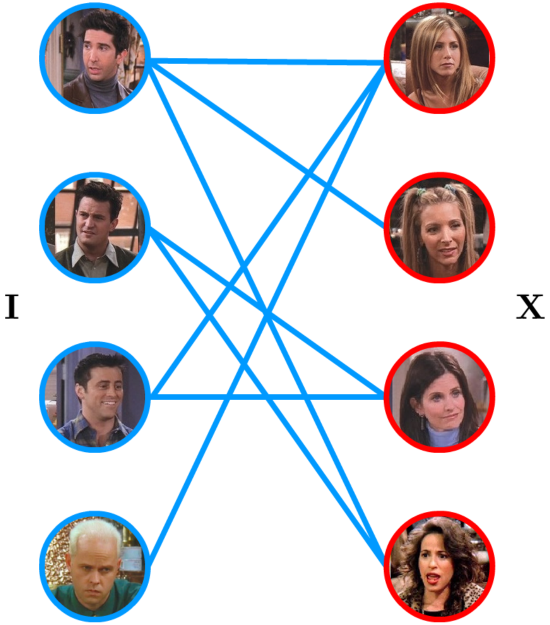
Zdroj: http://en.wikipedia.org

- V angličtině se tato věta nazývá „Hall's marriage theorem“.

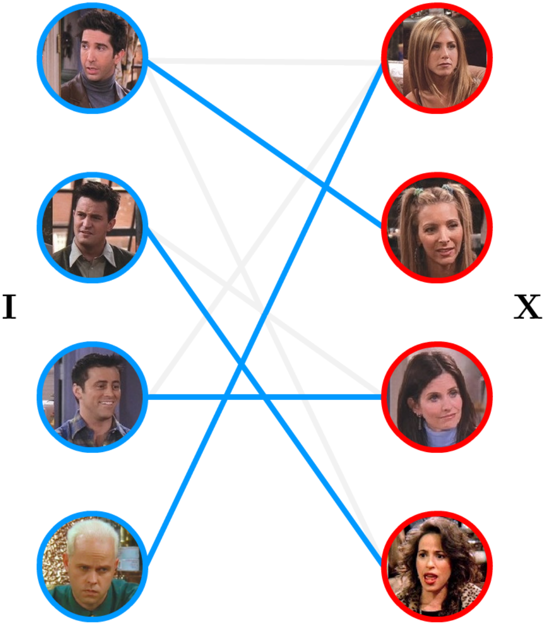
Hallova věta: příklad

Hallova věta: příklad

Hallova věta: příklad

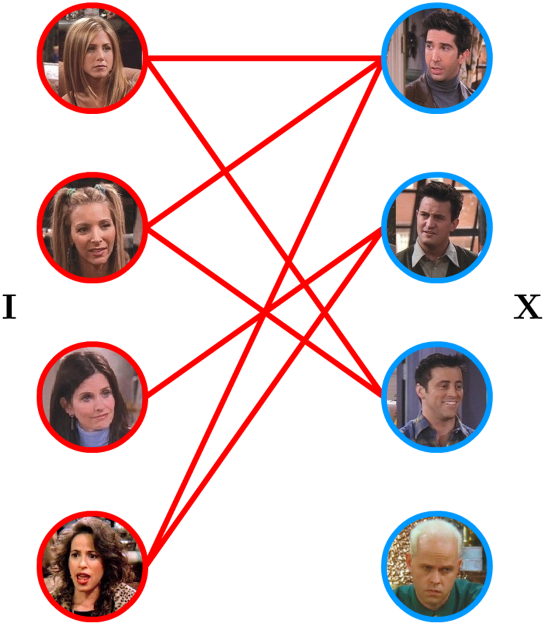


Hallova věta: příklad

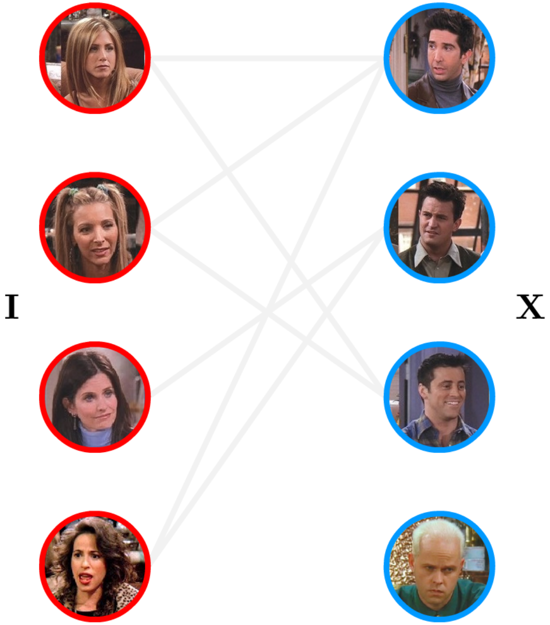


Hallova věta: příklad

Hallova věta: příklad



Hallova věta: příklad



Rozšiřování latinských obdélníků

Zdroj: www.britainexpress.com

Zdroj: www.britainexpress.com

Zdroj: www.britainexpress.com

Shall	wee	all	dye
wee	Shall	dye	all
all	dye	Shall	wee
dye	all	wee	Shall

Deska v St. Mawgan Church připomínající Hanniballa Basseta († 1709).

Zdroj: www.britainexpress.com

Shall	wee	all	dye
wee	Shall	dye	all
all	dye	Shall	wee
dye	all	wee	Shall

Deska v St. Mawgan Church připomínající Hanniballa Basseta († 1709).

Děkuji za pozornost.