Kombinatorika a grafy I

Martin Balko

5. přednáška

19. března 2019

Konečné projektivní roviny

Připomenutí z minula I

Připomenutí z minula I

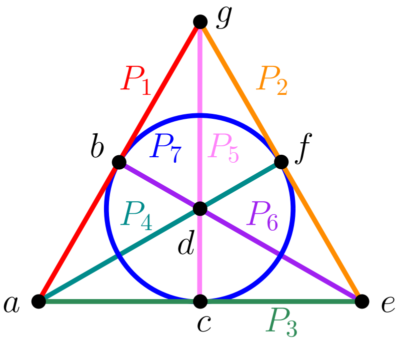
- Množinový systém $(X, \mathcal{P})$ je konečná projektivní rovina, pokud platí:
  (A1) $\forall\, x, y \in X, x \neq y\ \exists!\ P \in \mathcal{P} : \{x, y\} \subseteq P$,
  (A2) $\forall\, P, Q \in \mathcal{P}, P \neq Q : |P \cap Q| = 1$,
  (A3) $\exists C \subseteq X, |C| = 4\ \forall\, P \in \mathcal{P} : |C \cap P| \leq 2$.

  Prvky z X nazýváme body a množiny z $\mathcal{P}$ jsou přímky.

Připomenutí z minula I

- Množinový systém $(X, \mathcal{P})$ je konečná projektivní rovina, pokud platí:
  - (A1) $\forall\, x, y \in X, x \neq y\ \exists!\ P \in \mathcal{P} : \{x, y\} \subseteq P$,
  - (A2) $\forall\, P, Q \in \mathcal{P}, P \neq Q : |P \cap Q| = 1$,
  - (A3) $\exists C \subseteq X, |C| = 4\ \forall\, P \in \mathcal{P} : |C \cap P| \leq 2$.

  Prvky z X nazýváme body a množiny z $\mathcal{P}$ jsou přímky.



Obrázek: Fanova rovina.

Připomenutí z minula II

Připomenutí z minula II

Tvrzení 1

V konečné projektivní rovině mají všechny přímky stejný počet bodů.

Připomenutí z minula II

Tvrzení 1

V konečné projektivní rovině mají všechny přímky stejný počet bodů.

- Řád konečné projektivní roviny = počet bodů na přímce − 1.

Připomenutí z minula II

Tvrzení 1

V konečné projektivní rovině mají všechny přímky stejný počet bodů.

- Řád konečné projektivní roviny = počet bodů na přímce − 1.

Tvrzení 2

V konečné projektivní rovině řádu n platí:

- každým bodem prochází právě $n+1$ přímek,
- $|X| = n^2 + n + 1$,
- $|\mathcal{P}| = n^2 + n + 1$.

Připomenutí z minula II

Tvrzení 1

V konečné projektivní rovině mají všechny přímky stejný počet bodů.

- Řád konečné projektivní roviny $=$ počet bodů na přímce $- 1$.

Tvrzení 2

V konečné projektivní rovině řádu n platí:

- každým bodem prochází právě $n+1$ přímek,
- $|X| = n^2 + n + 1$,
- $|\mathcal{P}| = n^2 + n + 1$.

- Duál množinového systému $(X, \mathcal{P})$ je $(\mathcal{P}, \{\{S \in \mathcal{P} \colon x \in S\} \colon x \in X\})$.

Připomenutí z minula II

Tvrzení 1

V konečné projektivní rovině mají všechny přímky stejný počet bodů.

- Řád konečné projektivní roviny = počet bodů na přímce − 1.

Tvrzení 2

V konečné projektivní rovině řádu n platí:

- každým bodem prochází právě $n+1$ přímek,
- $|X| = n^2 + n + 1$,
- $|\mathcal{P}| = n^2 + n + 1$.

- Duál množinového systému $(X, \mathcal{P})$ je $(\mathcal{P}, \{\{S \in \mathcal{P} : x \in S\} : x \in X\})$.

Tvrzení 3

Duálem konečné projektivní roviny řádu n je konečná projektivní rovina řádu n.

Konstrukce konečných projektivních rovin z těles

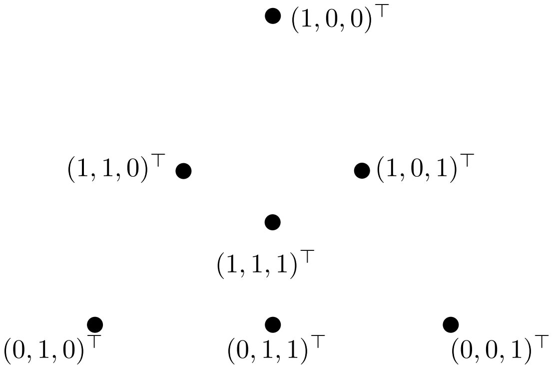
Věta 1

Existuje-li algebraické těleso s n prvky, pak existuje konečná projektivní rovina řádu n.

Konstrukce konečných projektivních rovin z těles

Věta 1

Existuje-li algebraické těleso s n prvky, pak existuje konečná projektivní rovina řádu n.

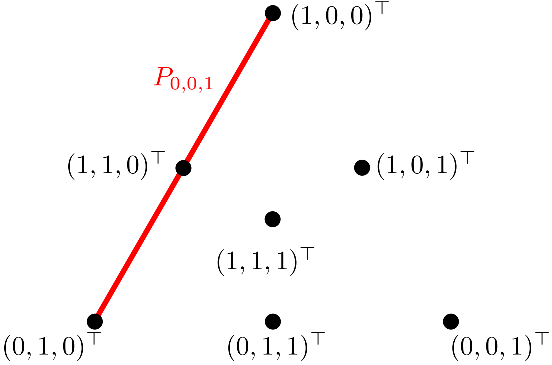


Obrázek: Příklad konstrukce: Fanova rovina.

Konstrukce konečných projektivních rovin z těles

Věta 1

Existuje-li algebraické těleso s n prvky, pak existuje konečná projektivní rovina řádu n.

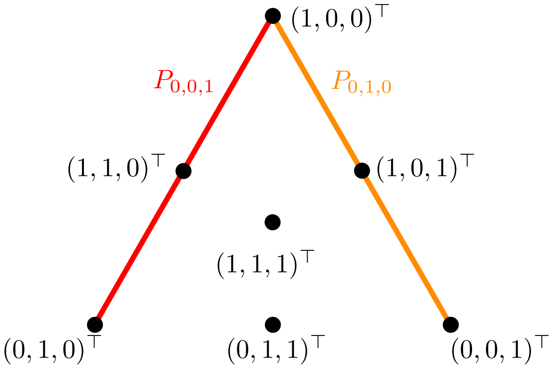


Obrázek: Příklad konstrukce: Fanova rovina.

Konstrukce konečných projektivních rovin z těles

Věta 1

Existuje-li algebraické těleso s n prvky, pak existuje konečná projektivní rovina řádu n.

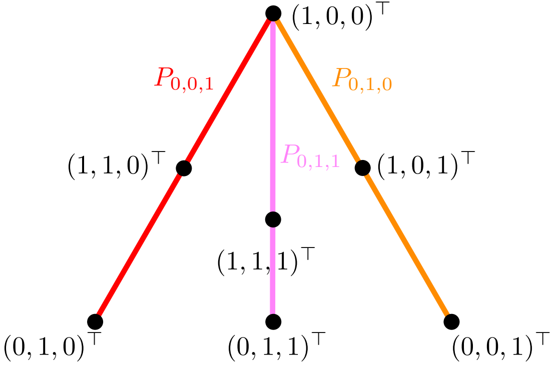


Obrázek: Příklad konstrukce: Fanova rovina.

Konstrukce konečných projektivních rovin z těles

Věta 1

Existuje-li algebraické těleso s n prvky, pak existuje konečná projektivní rovina řádu n.

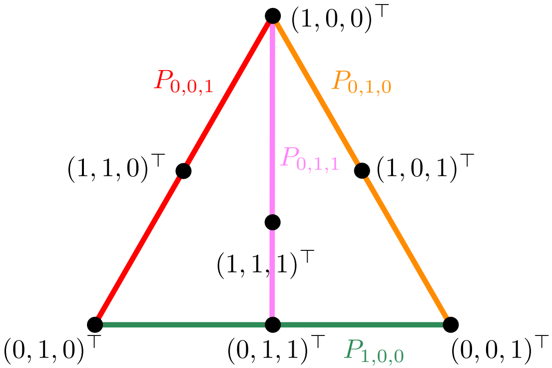


Obrázek: Příklad konstrukce: Fanova rovina.

Konstrukce konečných projektivních rovin z těles

Věta 1

Existuje-li algebraické těleso s n prvky, pak existuje konečná projektivní rovina řádu n.

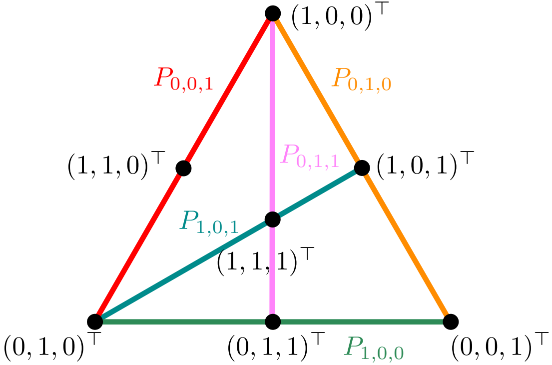


Obrázek: Příklad konstrukce: Fanova rovina.

Konstrukce konečných projektivních rovin z těles

Věta 1

Existuje-li algebraické těleso s n prvky, pak existuje konečná projektivní rovina řádu n.

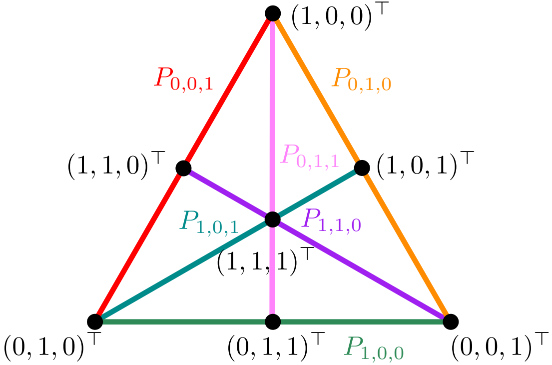


Obrázek: Příklad konstrukce: Fanova rovina.

Konstrukce konečných projektivních rovin z těles

Věta 1

Existuje-li algebraické těleso s n prvky, pak existuje konečná projektivní rovina řádu n.

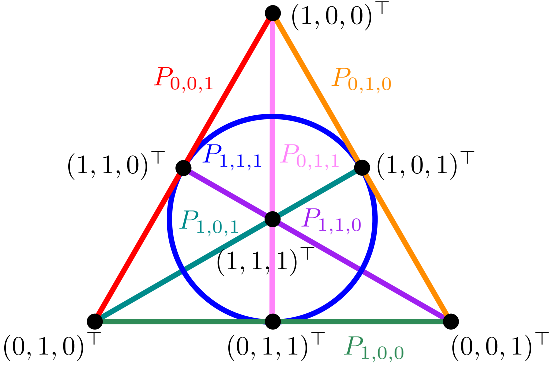


Obrázek: Příklad konstrukce: Fanova rovina.

Konstrukce konečných projektivních rovin z těles

Věta 1

Existuje-li algebraické těleso s n prvky, pak existuje konečná projektivní rovina řádu n.



Obrázek: Příklad konstrukce: Fanova rovina.

Latinské čtverce

Navzájem ortogonální latinské čtverce

Navzájem ortogonální latinské čtverce

- Tři navzájem ortogonální latinské čtverce řádu 4:

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

1	2	3	4
3	4	1	2
4	3	2	1
2	1	4	3

1	2	3	4
4	3	2	1
2	1	4	3
3	4	1	2

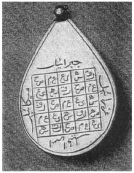
Navzájem ortogonální latinské čtverce

- Tři navzájem ortogonální latinské čtverce řádu 4:

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

1	2	3	4
3	4	1	2
4	3	2	1
2	1	4	3

1	2	3	4
4	3	2	1
2	1	4	3
3	4	1	2



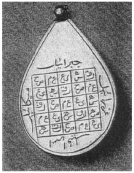
Navzájem ortogonální latinské čtverce

- Tři navzájem ortogonální latinské čtverce řádu 4:

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

1	2	3	4
3	4	1	2
4	3	2	1
2	1	4	3

1	2	3	4
4	3	2	1
2	1	4	3
3	4	1	2



Zdroj: „Chapter on The history of latin squares", Andersen, Lars Døvling a http://en.wikipedia.org

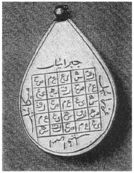
Navzájem ortogonální latinské čtverce

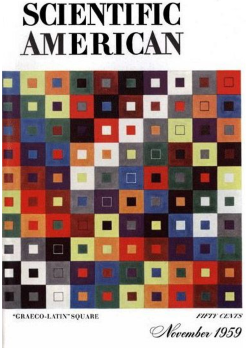
- Tři navzájem ortogonální latinské čtverce řádu 4:

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

1	2	3	4
3	4	1	2
4	3	2	1
2	1	4	3

1	2	3	4
4	3	2	1
2	1	4	3
3	4	1	2





Zdroj: „Chapter on The history of latin squares", Andersen, Lars Døvling a http://en.wikipedia.org

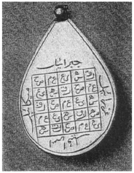
Navzájem ortogonální latinské čtverce

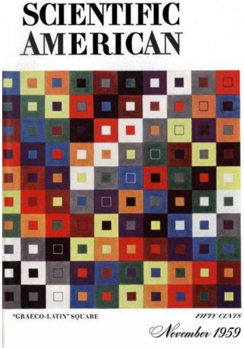
- Tři navzájem ortogonální latinské čtverce řádu 4:

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

1	2	3	4
3	4	1	2
4	3	2	1
2	1	4	3

1	2	3	4
4	3	2	1
2	1	4	3
3	4	1	2

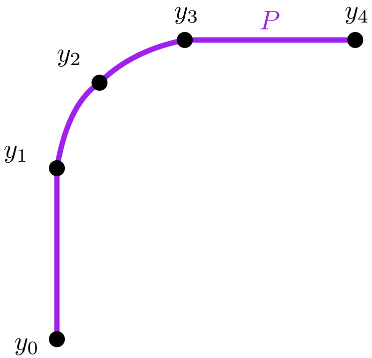




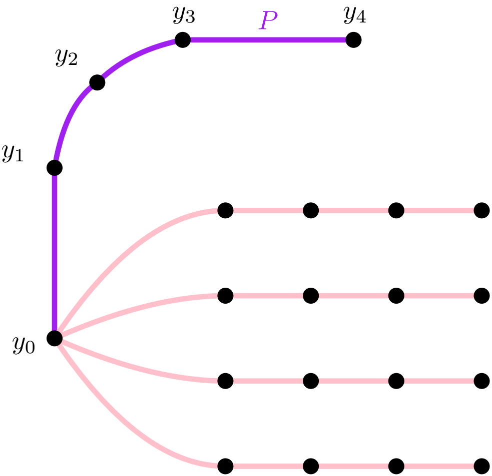
Zdroj: „Chapter on The history of latin squares“, Andersen, Lars Døvling a http://en.wikipedia.org

Příklad konstrukce NOLČ z KPR

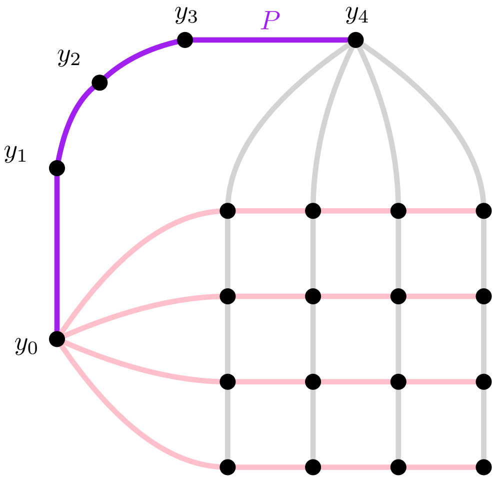
Příklad konstrukce NOLČ z KPR



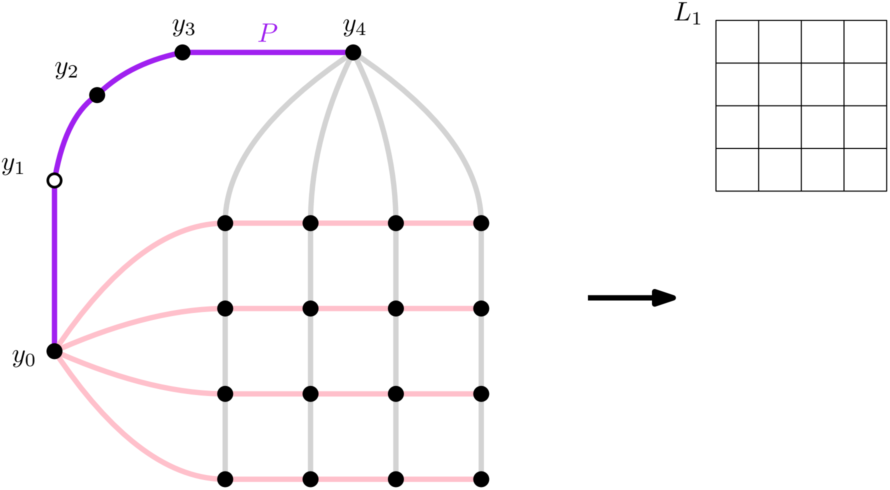
Příklad konstrukce NOLČ z KPR



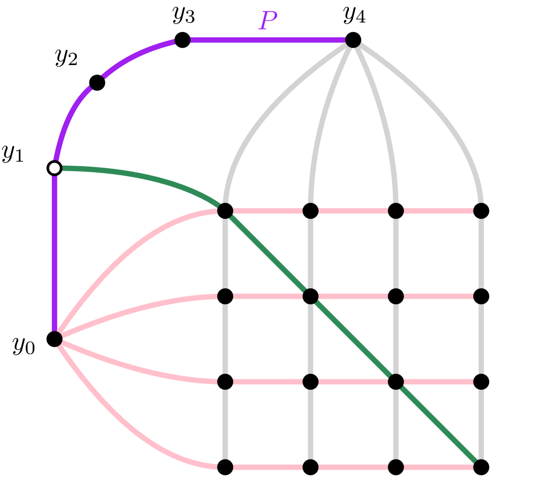
Příklad konstrukce NOLČ z KPR



Příklad konstrukce NOLČ z KPR



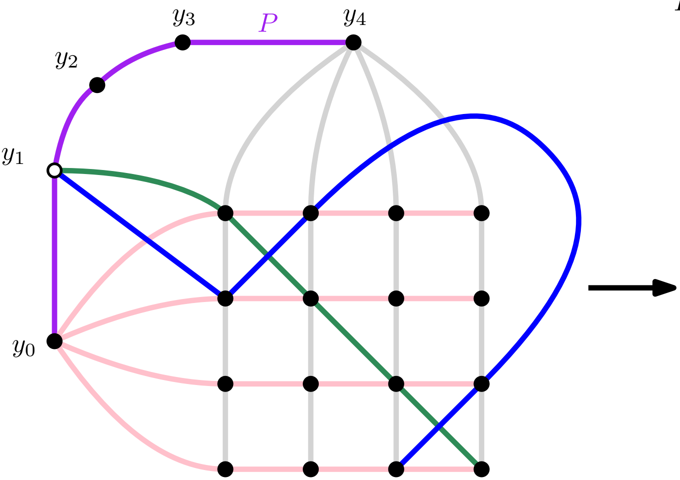
Příklad konstrukce NOLČ z KPR



L_1

1			
	1		
		1	
			1

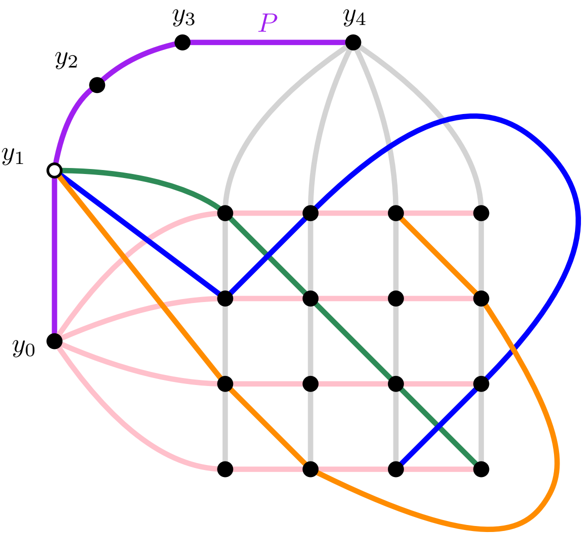
Příklad konstrukce NOLČ z KPR



L_1

1	2		
2	1		
		1	2
		2	1

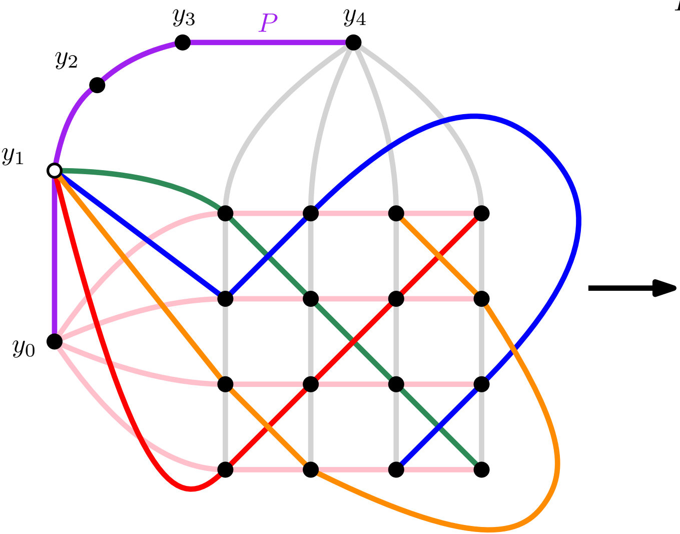
Příklad konstrukce NOLČ z KPR



L_1

1	2	3	
2	1		3
3		1	2
	3	2	1

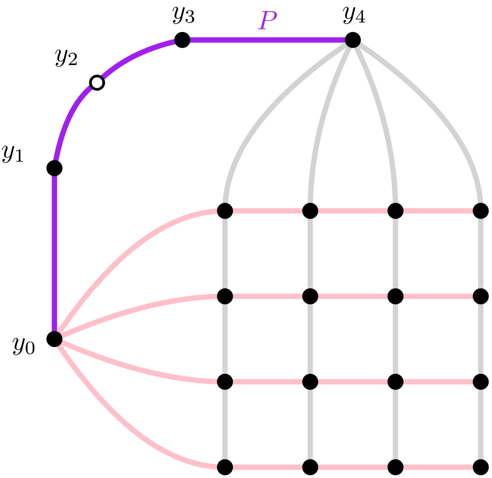
Příklad konstrukce NOLČ z KPR



L_1

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

Příklad konstrukce NOLČ z KPR

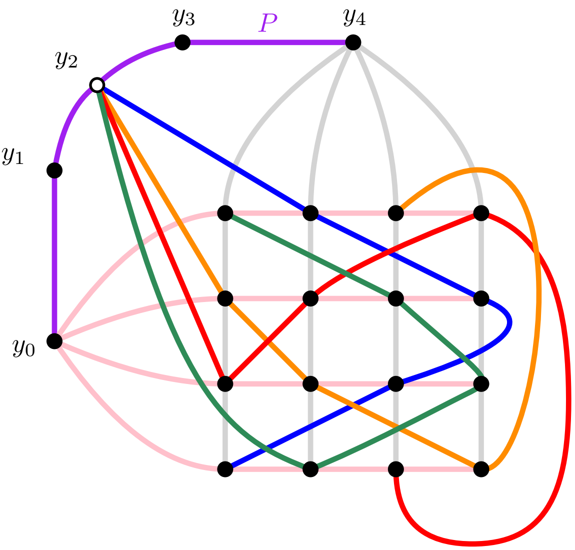


L_1

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

L_2

Příklad konstrukce NOLČ z KPR



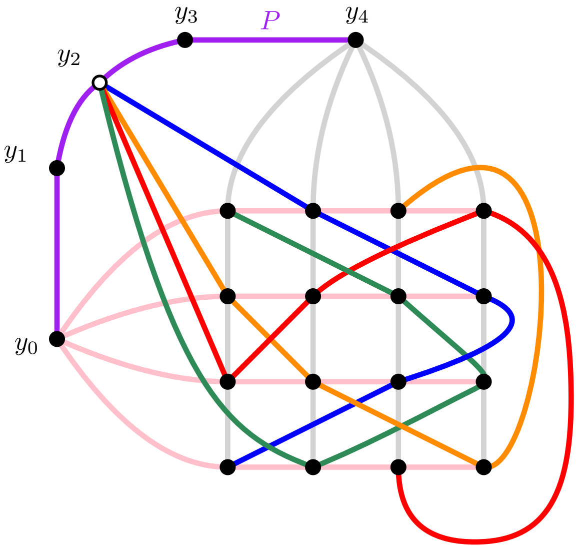
L_1

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

$\longrightarrow$

L_2

Příklad konstrukce NOLČ z KPR



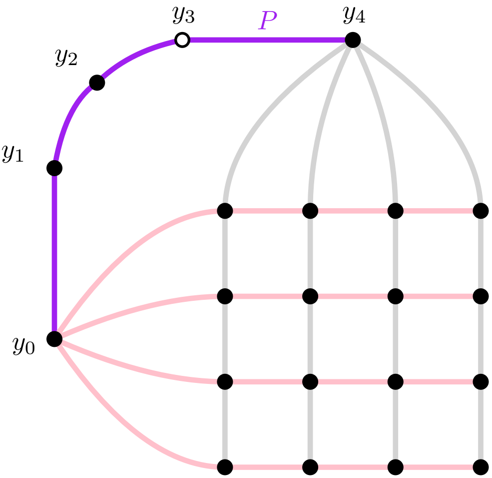
L_1

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

L_2

1	2	3	4
3	4	1	2
4	3	2	1
2	1	4	3

Příklad konstrukce NOLČ z KPR



$\longrightarrow$

L_1

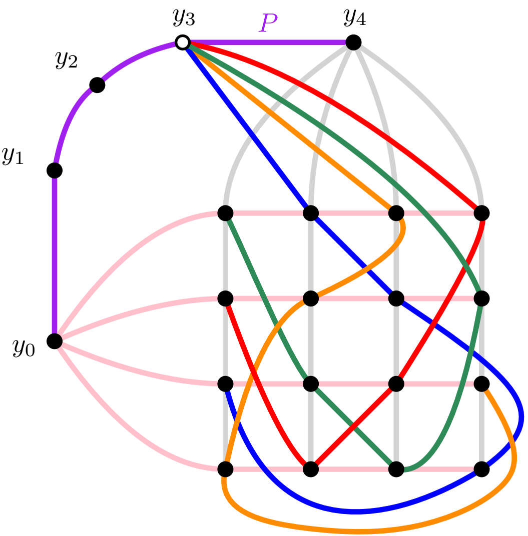
1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

L_2

1	2	3	4
3	4	1	2
4	3	2	1
2	1	4	3

L_3

Příklad konstrukce NOLČ z KPR



L_1

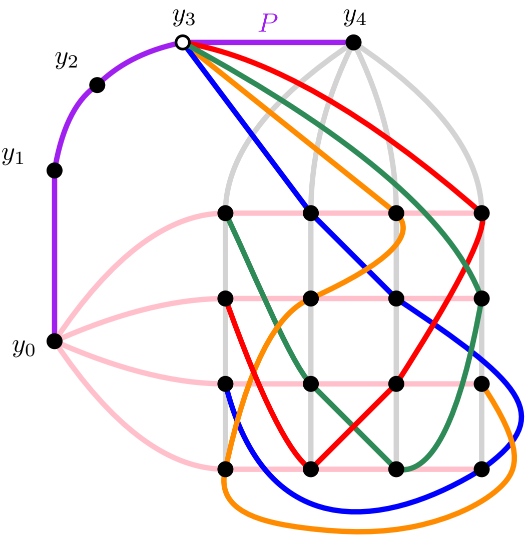
1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

L_2

1	2	3	4
3	4	1	2
4	3	2	1
2	1	4	3

L_3

Příklad konstrukce NOLČ z KPR



L_1

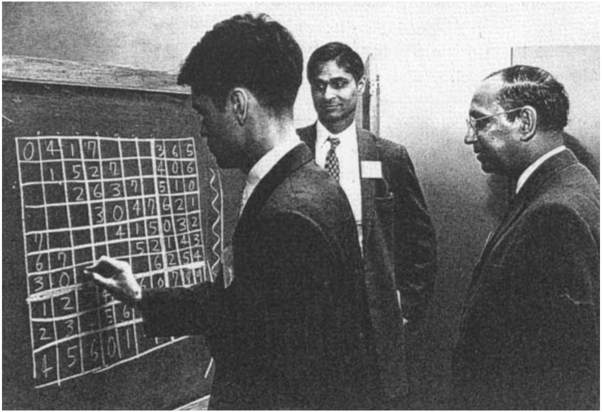
1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

L_2

1	2	3	4
3	4	1	2
4	3	2	1
2	1	4	3

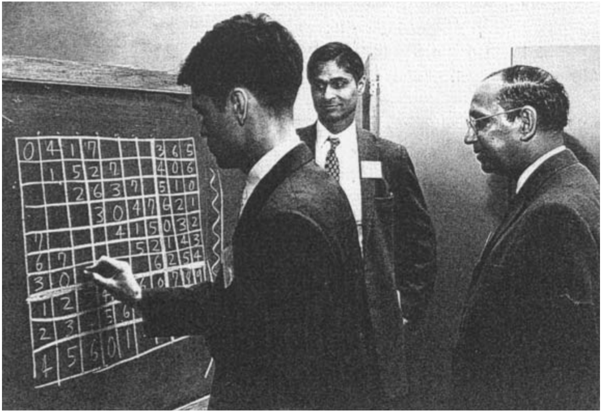
L_3

1	2	3	4
4	3	2	1
2	1	4	3
3	4	1	2



Zdroj: „Chapter on The history of latin squares“, Andersen, Lars Døvling

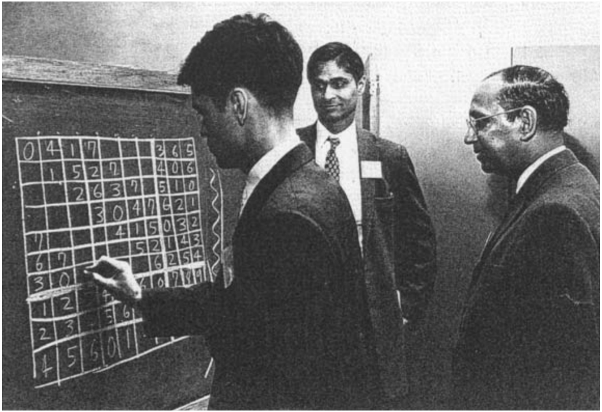
Obrázek: Foto z článku „Major Mathematical Conjecture Propounded 177 Years Ago Is Disproved“ z *New York Times* (1959) o vyvrácení Eulerovy domněnky o latinských čtvercích („Pro žádné $n \equiv 2 \pmod 4$ neexistují dva NOLČ řádu n.“).



Zdroj: „Chapter on The history of latin squares“, Andersen, Lars Døvling

Obrázek: Foto z článku „Major Mathematical Conjecture Propounded 177 Years Ago Is Disproved“ z *New York Times* (1959) o vyvrácení Eulerovy domněnky o latinských čtvercích („Pro žádné $n \equiv 2 \pmod 4$ neexistují dva NOLČ řádu n.“).

- Pokročilejší témata na přednášce Kombinatorické struktury.



Zdroj: „Chapter on The history of latin squares“, Andersen, Lars Døvling

Obrázek: Foto z článku „Major Mathematical Conjecture Propounded 177 Years Ago Is Disproved“ z *New York Times* (1959) o vyvrácení Eulerovy domněnky o latinských čtvercích („Pro žádné $n \equiv 2 \pmod 4$ neexistují dva NOLČ řádu n.“).

- Pokročilejší témata na přednášce Kombinatorické struktury.

Děkuji za pozornost.