Kombinatorika a grafy I — 8. cvičení*

12. dubna 2019

1 Grafová souvislost

Hranový řez v grafu $G = (V, E)$ je množina hran $F \subseteq E$ taková, že graf $(V, E \setminus F)$ je nesouvislý. *Vrcholový řez* v grafu G je množina vrcholů $A \subseteq V$ taková, že graf $(V \setminus A, E \cap \binom{V \setminus A}{2})$ je nesouvislý. *Hranová souvislost* $k_e(G)$ grafu G je velikost nejmenšího hranového řezu v G a 1, pokud $G \cong K_1$. *Vrcholovou souvislost* $k_v(G)$ grafu G definujeme jako $n-1$, je-li G úplný graf K_n s $n \geq 2$, jako 1 pro $G \cong K_1$ a jako velikost nejmenšího vrcholového řezu v G jinak. Graf G je *hranově t-souvislý* pro $t \in \mathbb{N}_0$, pokud platí $k_e(G) \geq t$ a *vrcholově t-souvislý*, pokud platí $k_v(G) \geq t$.

Z přednášky víme, že odebráním hrany vrcholová ani hranová souvislost nevzroste a klesne nanejvýš o jedna.

Příklad 1. *Najděte příklad grafu G, ve kterém lze odebrat vrchol tak, že*

(a) hranová souvislost G klesne (vzroste) o libovolně velké předem dané číslo.

(b) vrcholová souvislost G vzroste o libovolně velké předem dané číslo. O kolik může vrcholová souvislost klesnout po odebrání vrcholu?

Příklad 2. *Rozhodněte, zda je každý souvislý graf se sudými stupni a s neprázdnou množinou hran*

(a) vrcholově 2-souvislý,

(b) hranově 2-souvislý.

Příklad 3. *Pro $k \in \mathbb{N}$ označme jako $\mathbb{B}^k$ množinu binárních řetízků délky k. Uvažme graf $Q_k = (V, E)$, nazývaný k-*krychle*, ve kterém $V = \mathbb{B}^k$ a $\{u, v\} \in E$ právě tehdy, když se řetízky u a v liší na právě jedné pozici. Ukažte, že $k_v(Q_k) = k$.*

Příklad 4. *Graf je k-*regulární*, má-li všechny stupně rovné k.*

(a) (*) Ukažte, že pro každé $k \geq 2$ je každý k-regulární souvislý bipartitiní graf vrcholově 2-souvislý.

(b) Je pro $k \geq 2$ každý k-regulární (ne nutně bipartitní) souvislý graf vrcholově 2-souvislý?

(c) Co když v příkladu nahradíme vrcholovou souvislost hranovou?

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/