Kombinatorika a grafy I — 7. cvičení*

5. dubna 2019

1 Aplikace Hallovy věty

Vrcholovým pokrytím v grafu $G = (V, E)$ je množina $C \subseteq V$ taková, že pro každé $e \in E$ platí $e \cap C \neq \emptyset$. *Párováním* v G je množina disjunktních hran z E.

Kőnigova–Egerváryho věta. *V každém bipartitním grafu se velikost minimálního vrcholového pokrytí rovná velikosti maximálního párování.*

Nechť X a I jsou konečné množiny. *Množinovým systémem na* X nazveme $|I|$-tici $\mathcal{M} = (M_i \colon i \in I)$, kde $M_i \subseteq X$. *Systém různých reprezentantů* (SRR) je prostá funkce $f\colon I \to X$ taková, že pro každé $i \in I$ je $f(i) \in M_i$. Víme, že existence SRR v $\mathcal{M}$ je ekvivalentní s existencí párování velikosti $|I|$ v *incidenčním grafu* $G_{\mathcal{M}} = (I \cup X, \{\{i, x\} \colon i \in I, x \in X, x \in M_i\})$.

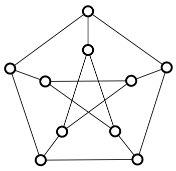
Hallova věta. *Systém různých reprezentantů v* $\mathcal{M}$ *existuje právě tehdy, když pro každou* $J \subseteq I$ *je* $\left|\bigcup_{j \in J} M_j\right| \geq |J|$*; tato podmínka se nazývá Hallova.*

Příklad 1. *Nechť* a, b, c, d, e *jsou různá přirozená čísla.*

(a) Má množinový systém tvořený všemi tříprvkovými podmnožinami množiny $\{a, b, c, d\}$ *systém různých reprezentantů?*

(b) Má množinový systém tvořený všemi tříprvkovými podmnožinami množiny $\{a, b, c, d, e\}$ *systém různých reprezentantů?*

Příklad 2. Perfektní párování grafu G *je takové párování, které pokrývá všechny vrcholy grafu* G*. Najděte všechna perfektní párování v Petersonově grafu. Ukažte, že víc jich neexistuje.*



Příklad 3. *Dokažte, že Hallova věta implikuje Kőnigovu–Egerváryho větu.*

Příklad 4. Latinský obdélník řádu $k \times n$, $k \leq n$ *je matice typu* $\{1, \ldots, n\}^{k \times n}$*, kde se v každém řádku a sloupci každý prvek vyskytuje nejvýše jednou.* Latinský čtverec řádu n *je latinský obdélník řádu* $n \times n$.

Ukažte, že latinských čtverců řádu n *je alespoň* $\Omega((n!)^2)$.

Příklad 5. *Najděte nekonečný systém množin* $\mathcal{M} = (M_i \colon i \in I)$*, který splňuje Hallovu podmínku (tj. pro každé* $k \in \mathbb{N}$ *obsahuje sjednocení libovolné* k*-tice množin z* $\mathcal{M}$ *aspoň* k *prvků), ale nemá systém různých reprezentantů.*

Příklad 6 (*). *Pro* $n \times n$ *matici* $A = (a_{ij})$ *definujeme* permanent matice A *jako*

$$\mathrm{per}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}.$$

(a) Buď G *bipartitní graf s partitami* $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ *a* $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *a nechť* $a_{ij} = 1$*, pokud* $\{u_i, v_j\} \in E(G)$ *a* $a_{ij} = 0$ *jinak. Ukažte, že počet perfektních párování v* G *je* $\mathrm{per}(A)$*, kde* $A = (a_{ij})$.

(b) Nechť $A = (a_{ij})$ *je nezáporná* $n \times n$ *matice, ve které se všechny řádkové a sloupcové součty rovnají jedné (tzv.* dvojitě stochastická matice*). Ukažte, že* $\mathrm{per}(A) > 0$.

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/