Kombinatorika a grafy I — 5. cvičení*

22. března 2019

1 Konečné projektivní roviny

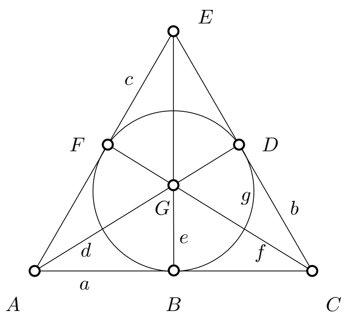
Nechť X je konečná množina a $\mathcal{P} \subseteq 2^X$. Potom dvojici $(X, \mathcal{P})$ nazveme *konečnou projektivní rovinou*, pokud splňuje následující axiomy:

(A1) $\forall\, x, y \in X, x \neq y\ \exists!\, P \in \mathcal{P} : x, y \in P$ (každými dvěma body prochází právě jedna přímka).

(A2) $\forall\, P, Q \in \mathcal{P}, P \neq Q : |P \cap Q| = 1$ (každé dvě přímky se protínají v právě jednom bodě).

(A3) $\exists\, C \subseteq X, |C| = 4\ \forall\, P \in \mathcal{P} : |C \cap P| \leq 2$ (existují 4 body v obecné poloze).

Řád projektivní roviny $(X, \mathcal{P})$ se rovná počtu bodů na přímce minus jedna (víme, že všechny přímky obsahují stejný počet bodů). Víme také, že konečná projektivní rovina řádu n obsahuje $n^2 + n + 1$ přímek a bodů a také že každý bod leží na právě $n + 1$ přímkách. Příkladem konečné projektivní roviny řádu 2 je *Fanova rovina*:



Konstrukce projektivních rovin: Mějme těleso $\mathbb{K}$. Uvažme množinu T trojic z $\mathbb{K}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ a definujeme ekvivalenci $\sim$ nad T tak, že pro trojice (x, y, z) a $(x\prime, y\prime, z\prime)$ z T platí $(x, y, z) \sim (x\prime, y\prime, z\prime)$, pokud existuje nenulové $\lambda \in \mathbb{K}$ takové, že $(x, y, z) = (\lambda x\prime, \lambda y\prime, \lambda z\prime)$. Třídy ekvivalence budou body naší projektivní roviny. Pro každou trojici $(a, b, c) \in T$ definujeme přímku $P_{a,b,c}$ jako množinu bodů (x, y, z) naší projektivní roviny, kde platí $ax + by + cz = 0$. Pro $(a, b, c) \sim (a', b', c')$ dostaneme $P_{a,b,c} = P_{a',b',c'}$. Je-li $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, pak z této konstrukce dostaneme *reálnou projektivní rovinu.*

Příklad 1. *Bez použití duality dokažte, že každá konečná projektivní rovina řádu n obsahuje $n^2 + n + 1$ přímek. Hint: počítání dvěma způsoby.*

Příklad 2. *Na přednášce jsme viděli karetní hru Dobble, která je založena na projektivní rovině řádu 7. Na každé kartě v Dobble je právě 8 obrázků a hra využívá fakt, že každé dvě karty se shodují na právě jednom obrázku. Pro jaké hodnoty $n \in \mathbb{N}$ dokážete zkonstruovat takovou hru s právě n obrázky na každé kartě tak, aby se každý obrázek objevil na aspoň jednom páru karet?*

Příklad 3. *V Transylvánské loterii se náhodně losují tři různá čísla z čísel 1 až 14. Hráč si před slosováním za koupení jednoho lístku může vybrat tři čísla, přičemž vyhraje, pokud jsou mezi vylosovanými čísly aspoň dvě jím vybraná čísla. Kolik lístků si stačí koupit, abyste měli zaručenou výhru?*

Příklad 4. *Bez křížení hran nakreslete na reálnou projektivní rovinu*

(a) graf K_5,

(b) graf K_6.

Příklad 5. *(a) Ukažte, že existuje graf s N vrcholy a s aspoň $\Omega(N^{3/2})$ hranami, který neobdsahuje $K_{2,2}$ jako podgraf.*

(b) Bonusový příklad (*): ukažte, že každý takový graf má nanejvýš $O(N^{3/2})$ hran. Hint: dvěma způsoby spočítejte počet kopií $K_{1,2}$.

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/

2 Latinské čtverce

Latinský čtverec řádu n je tabulka o rozměrech $n \times n$ nad prvky z $\{1, 2, \ldots, n\}$, kde se každé číslo v každém sloupci a řádku vyskytuje právě jednou. Dva latinské čtverce L a L' jsou *ortogonální*, pokud pro každou uspořádanou dvojici čísel (a, b) z $\{1, 2, \ldots, n\}$ existuje $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takové, že $(a, b) = ((L)_{ij}, (L')_{ij})$. Množina $\{L_1, L_2, \ldots, L_t\}$ Latinských čtverců je množinou *navzájem ortogonálních Latinských čtverců*, pokud každé dva čtverce z této množiny jsou ortogonální. Tři navzájem ortogonální latinské čtverce řádu 4:

1	2	3	4
4	3	2	1
3	4	1	2
2	1	4	3

1	2	3	4
2	1	4	3
4	3	2	1
3	4	1	2

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

Příklad 6. *Rozhodněte, zda permutace řádků a sloupců zachovávají vlastnost být latinským čtvercem a zda tyto operace zachovávájí ortogonalitu.*