Kombinatorika a grafy I — 3. cvičení*

8. března 2019

1 Vytvořující funkce — aplikace

Vytvořující funkcí posloupnosti $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ je mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Například funkce $\frac{1}{1-x}$ je vytvořující funkcí posloupnosti $(1, 1, 1, \ldots)$.

Zobecněná binomická věta. *Pro libovolné $r \in \mathbb{R}$ a $x \in (-1, 1)$ platí*

$$(1+x)^r = \binom{r}{0} + \binom{r}{1}x + \binom{r}{2}x^2 + \cdots,$$

kde $\binom{r}{0} = 1$ a $\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!}$ pro $k \in \mathbb{N}$.

Jako důsledek Zobecněné binomické věty víme, že pro $n \in \mathbb{N}$ a $x \in (-1, 1)$ platí

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n+i-1}{n-1} x^i.$$

Příklad 1. *Určete koeficient u příslušné mocniny x v následujících výrazech. Vyjádřete jej ve tvaru $\binom{p}{q}$ pro nějaká přirozená čísla p a q.*

(a) u x^{15} ve výrazu $(x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)^4$,

(b) u x^{28} ve výrazu $(x + x^3 + x^5 + \cdots)^6$,

(c) u x^5 ve výrazu $\frac{1}{(1-2x)^2}$.

Příklad 2. *Uvažme náhodnou procházku v $\mathbb{Z}$ začínající v počátku, kde se v každém kroku $n = 1, 2, \ldots$ rozhodneme náhodně uniformně nezávisle, zda budeme pokračovat doleva či doprava.*

(a) Pro $n \in \mathbb{N}$ určete pravděpodobnost u_{2n} jevu, že se po $2n$ krocích se vrátíme do počátku.

(b) Určete vytvořující funkci $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{2n} x^n$.

(c) Nechť pro $n \in \mathbb{N}$ je f_{2n} pravděpodobnost jevu, že se po $2n$ krocích se vrátíme poprvé *do počátku. Dokažte, že pro $n \in \mathbb{N}$, $f_0 = 0$ a $u_0 = 1$ platí*

$$u_{2n} = f_0 u_{2n} + f_2 u_{2n-2} + \cdots + f_{2n} u_0.$$

(d) Za použití výsledků z předešlých částí určete vytvořující funkci $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{2n} x^n$ a její koeficienty f_{2n} (a tedy i pravděpodobnosti, že se poprvé vrátíme do počátku po $2n$ krocích).

(e) Ukažte, že suma $f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{2n}$ konverguje a za použití tohoto faktu ukažte, že pravděpodobnost návratu do počátku se rovná jedné.

Příklad 3. *Mějme dvě vytvořující funkce $a(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ a $b(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x^n$, kde $a_0 = 0$. Uvažme funkci $c(x) = b(a(x))$ vzniklou složením $a(x)$ a $b(x)$.*

(a) Napište vzorec pro koeficienty c_n funkce $c(x) = \sum_{n\geq 0} c_n x^n$. Proč trváme na předpokladu $a_0 = 0$?

(b) Nechť $c_0 = 1$ a nechť pro $n \in \mathbb{N}$ značí koeficient c_n počet uspořádaných rozkladů čísla n na kladné sčítance. Vyjádřete funkci $c(x) = \sum_{n\geq 0} c_n x^n$ jako složení dvou vhodných funkcí.

Příklad 4 (*). *Dokážete nalézt dvě nestandardní šestistěnné hrací kostky B a C takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je pravděpodobnost, že na B a C padne dohromady přesně n, stejná jako pravděpodobnost, že n padne na dvou standardních šestistěnných hracích kostkách?*

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/

Nechť $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ a $k \in \mathbb{N}$.

Základní operace s mocninnými řadami:	
$a(x) + b(x)$	$(a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots)$
$\alpha a(x)$	$(\alpha a_0, \alpha a_1, \alpha a_2, \ldots)$
$a(\alpha x)$	$(a_0, \alpha a_1, \alpha^2 a_2, \ldots, \alpha^i a_i, \ldots)$
$x^k a(x)$	$(0, \ldots, 0, a_0, a_1, a_2, \ldots)$ (k nul na začátku)
$a(x^k)$	$(a_0, 0, \ldots, 0, a_1, 0, \ldots)$ (střídavě $k-1$ nul)
$\frac{a(x) - a_0 - \cdots - a_{k-1} x^{k-1}}{x^k}$	$(a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots)$
$a'(x)$	$(a_1, 2a_2, 3a_3, \ldots, i a_i, \ldots)$
$\int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t$	$(0, a_0, \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{3}, \ldots, \frac{a_i}{i+1}, \ldots)$
$a(x)b(x)$	$(c_0, c_1, c_2, \ldots)$, kde $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$