

Kombinatorika a grafy I — 11. cvičení*

10. května 2019

1 Ramseyova teorie a grafy

Pro $k \in \mathbb{N}$ nazveme k -obarvením množiny X libovolnou funkci $f: X \rightarrow C$, kde C je množina k barev. Pro $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ definujeme Ramseyovo číslo $R_2(n_1, \dots, n_k)$ jako nejmenší $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé k -obarvení hran grafu K_N existuje $i \in \{1, \dots, k\}$ takové, že dané k -obarvení obsahuje K_{n_i} jako podgraf se všemi hranami obarvenými i -tou barvou.

Ramseyova věta pro grafy. Pro každé $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ je číslo $R_2(n_1, \dots, n_k)$ konečné.

Z přednášky také víme, že $R_2(3, 3) = 6$ a $R_2(k, l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}$ pro každé $k, l \in \mathbb{N}$.

Označíme-li pro grafy H_1, \dots, H_k jako $R_2(H_1, \dots, H_k)$ nejmenší $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé k -obarvení hran grafu K_N existuje $i \in \{1, \dots, k\}$ takové, že dané k -obarvení obsahuje H_i jako podgraf se všemi hranami obarvenými i -tou barvou, pak z Ramseyovy věty dostáváme $R_2(H_1, \dots, H_k) \leq R_2(|V(H_1)|, \dots, |V(H_k)|)$. Tedy i tato Ramseyovská čísla obecných grafů jsou vždy konečná.

Příklad 1. Určete nejmenší N takové, že v každém červeno-modrém obarvení hran K_N najdeme buď modrou kopii $K_{1,3}$ nebo červenou kopii K_3 . Neboli určete $R_2(K_{1,3}, K_3)$.

Příklad 2. Ukažte, že pro každé fixní $k \in \mathbb{N}$ existuje $N_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $N \geq N_0$ je v každém 2-obarvení hran grafu K_N aspoň $\Omega(N^k)$ kopií K_k se všemi hranami stejné barvy. Neboli ukažte, že od jistého počtu vrcholů není zaručena jen jedna jednobarevná kopie K_k , ale dokonce jich najdeme velmi mnoho.

Příklad 3. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

- Obarvíme-li dostatečně velký úplný graf se smyčkami dvěma barvami (barvíme hrany a smyčky), vždy existuje jednobarevný úplný podgraf se smyčkami na n vrcholech.
- Pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro libovolný graf G na N vrcholech platí: buď G obsahuje $K_{n,n}$ jako podgraf nebo doplněk G obsahuje $K_{n,n}$ jako podgraf.
- Pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro libovolný graf G na N vrcholech platí: buď G obsahuje $K_{n,n}$ jako podgraf nebo G obsahuje doplněk $K_{n,n}$ jako podgraf.
- Pro každý graf G existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že v libovolném 2-obarvení hran K_N najdeme jednobarevnou G jako indukovaný podgraf.

Příklad 4. Dokažte nerovnost $R_2(3, \dots, 3) \leq \lfloor e \cdot k! \rfloor + 1$ pro Ramseyovo číslo $R_2(3, \dots, 3)$ s k barvami.

Příklad 5. Dokažte, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že pro každý graf $G = (V, E)$ s alespoň n vrcholy a každé jeho 2-obarvení hran existuje $U \subseteq V$ velikosti alespoň k taková, že všechny hrany indukovaného podgrafu $G[U]$ mají stejnou barvu.

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>