

Kombinatorika a grafy I — 10. cvičení*

3. května 2019

1 Počítání dvěma způsoby

Počítání dvěma způsoby je metoda důkazu v kombinatorice, kde odhadujeme neznámou x pomocí odhadů jiné neznámé z , které umíme určit dvěma způsoby: jeden za použití x a druhý přímým výpočtem. Zkombinováním obou odhadů pro z poté dostáváme odhad pro hledané x .

Cauchyho–Schwarzova nerovnost. Pro každé $x, y \in \mathbb{R}^n$ platí

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Příklad 1. Na dětském táboře je 15 dětí, každý den mají tři děti službu v kuchyni, a platí, že každá dvojice dětí má právě jednu společnou službu. Kolik dní trvá tábor?

Příklad 2. Při zápočtové písemce každý student vyřešil aspoň třetinu všech úloh a navíc většina studentů vyřešila aspoň dvě třetiny úloh. Ukažte, že v písemce existuje úloha, kterou vyřešila většina studentů.

Příklad 3. Pole mřížky 21×21 jsou obarvena tak, že v každém řádku i sloupci se vyskytuje nejvýše 5 různých barev. Ukažte, že se některá z barev vyskytuje ve třech řádcích a zároveň i ve třech sloupcích.

Příklad 4. Nechť máme rovinné nakreslení grafu G , ve kterém jsou všechny stěny trojúhelníky. Předpokládejme, že vrcholy G jsou obarveny třemi barvami (nemusí se nutně jednat o korektní obarvení, tj. může existovat hrana s oběma koncovými vrcholy stejné barvy). Ukažte, že počet stěn, na jejichž vrcholech jsou použity všechny tři barvy, je sudý.

Příklad 5 (*). Ukažte, že každý graf s N vrcholy neobsahující podgraf $K_{2,2}$ má nanejvýš $O(N^{3/2})$ hran.

Hint: Dvěma způsoby odhadněte počty podgrafů $K_{1,2}$ a použijte Cauchyho–Schwarzovu nerovnost.

Pro připomenutí: z pátého cvičení již víme, že odhad je až na multiplikativní konstantu těsný.

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>