Kombinatorika a grafy I — 1. cvičení*

22. února 2019

1 Odhady

Mějme nezáporné funkce $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$. Potom značení $f(n) = O(g(n))$ znamená, že existují konstanty C a n_0 takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $f(n) \leq C \cdot g(n)$. Neboli funkce f roste asymptoticky nanejvýš tak rychle jako g. Podobně využíváme i následující značení:

Značení	Definice	Význam
$f(n) = \Omega(g(n))$	$\exists C > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0\colon f(n) \geq C \cdot g(n)$	f roste aspoň tak rychle jako g
$f(n) = \Theta(g(n))$	$\exists C_1 > 0\ \exists C_2 > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0\colon$ $C_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq C_2 \cdot g(n)$	f a g mají stejnou asymptotiku
$f(n) = o(g(n))$	$\forall C > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0\colon f(n) \leq C \cdot g(n)$	f roste mnohem pomaleji než g
$f(n) \sim g(n)$	$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$	$f(n)$ a $g(n)$ jsou téměř shodné

Příklad 1. *Seřaďte následující výrazy podle velikosti pro velké n (tedy například pro $n > 10^{10^{10}}$):*

$$2^{2n},\ e^{\ln^3 n},\ \binom{2n}{n},\ n^{\ln n},\ \left(\sqrt{n}\right)^n.$$

Příklad 2. *Rozhodněte, zda jsou následující výrazy pravdivé.*

(a) $n! = 2^{O(n)}$,

(b) $n^2 + 5n \ln n = n^2(1 + o(1)) \sim n^2$,

(c) $n^{\ln n} = 2^{\Omega(n)}$,

(d) $\sum_{i=1}^{n} i^8 = \Theta(n^9)$.

Příklad 3. *Nalezněte kladné a neklesající funkce $f(n)$ a $g(n)$ definované pro všechna přirozená čísla tak, aby neplatilo $f(n) = O(g(n))$ a ani $g(n) = O(f(n))$.*

Příklad 4. *Uvažme náhodnou procházku v $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ začínající v počátku, kde se v každém kroku $i = 1, 2, \ldots$ rozhodneme náhodně uniformně nezávisle, zda budeme pokračovat doleva, doprava, nahoru, či dolů.*

(a) Úpravou postupu z přednášky pro náhodnou procházku v $\mathbb{Z}$ odhadněte střední hodnotu počtu návratů do počátku v $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Je tato hodnota shora omezená?

(b) (*) Odhadněte střední hodnotu počtu návratů do počátku pro náhodnou procházku v $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/