

Kombinatorika a grafy 1 — 9. cvičení*

29. listopadu 2024

1 Počítání dvěma způsoby

Počítání dvěma způsoby je metoda důkazu v kombinatorice, kde odhadujeme neznámou x pomocí odhadů jiné neznámé z , které umíme určit dvěma způsoby: jeden za použití x a druhý přímým výpočtem. Zkombinováním obou odhadů pro z poté dostáváme odhad pro hledané x .

Příklad 1. *Na dětském táboře je 15 dětí, každý den mají tři děti službu v kuchyni, a platí, že každá dvojice dětí má právě jednu společnou službu. Kolik dní trvá tábor?*

Příklad 2. *Při zápočtové písemce každý student vyřešil aspoň třetinu všech úloh a navíc většina studentů vyřešila aspoň dvě třetiny úloh. Ukažte, že v písemce existuje úloha, kterou vyřešila většina studentů.*

Příklad 3. *Pole mřížky 21×21 jsou obarvena tak, že v každém řádku i sloupci se vyskytuje nejvýše 5 různých barev. Ukažte, že se některá z barev vyskytuje ve třech řádcích a zároveň i ve třech sloupcích.*

Příklad 4. *Počet koster úplného grafu K_n je n^{n-2} pro každé $n \geq 1$.*

(a) *Kolik je koster K_n obsahujících jednu vybranou hranu?*

(b) *Kolik je koster grafu, který z K_n vznikne odebráním jedné hrany?*

Příklad 5. *Nechť máme rovinné nakreslení grafu G , ve kterém jsou všechny stěny trojúhelníky. Předpokládejme, že vrcholy G jsou obarveny třemi barvami (nemusí se nutně jednat o korektní obarvení, tj. může existovat hrana s oběma koncovými vrcholy stejné barvy). Ukažte, že počet stěn, na jejichž vrcholech jsou použity všechny tři barvy, je sudý.*

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>