

Kombinatorika a grafy 1 — 8. cvičení*

22. listopadu 2024

1 Grafová souvislost

Hranový řez v grafu $G = (V, E)$ je množina hran $F \subseteq E$ taková, že graf $(V, E \setminus F)$ je nesouvislý. *Vrcholový řez* v grafu G je množina vrcholů $A \subseteq V$ taková, že graf $(V \setminus A, E \cap \binom{V \setminus A}{2})$ je nesouvislý. *Hranová souvislost* $k_e(G)$ grafu G je velikost nejmenšího hranového řezu v G a 1, pokud $G \cong K_1$. *Vrcholová souvislost* $k_v(G)$ grafu G definujeme jako $n - 1$, je-li G úplný graf K_n s $n \geq 2$, jako 1 pro $G \cong K_1$ a jako velikost nejmenšího vrcholového řezu v G jinak. Graf G je *hranově t -souvislý* pro $t \in \mathbb{N}_0$, pokud platí $k_e(G) \geq t$ a *vrcholově t -souvislý*, pokud platí $k_v(G) \geq t$.

Ušaté lemma. *Graf je vrcholově 2-souvislý právě tehdy, když jde dostat z cyklu lepením uší.*

Příklad 1. *Pro každý graf $G = (V, E)$ a jeho hranu $e \in E$ ukažte, že*

(a) $k_e(G) - 1 \leq k_e(G - e) \leq k_e(G)$,

(b) (*) $k_v(G) - 1 \leq k_v(G - e) \leq k_v(G)$.

Příklad 2. *Pro každý graf G ukažte, že $k_v(G) \leq k_e(G)$.*

Hint: může se hodit řešení předešlého příkladu.

Příklad 3. *Najděte příklad grafu G , ve kterém lze odebrat vrchol tak, že*

(a) *hranová souvislost G klesne (vzroste) o libovolně velké předem dané číslo.*

(b) *vrcholová souvislost G vzroste o libovolně velké předem dané číslo. O kolik může vrcholová souvislost klesnout po odebrání vrcholu?*

Příklad 4. *Rozhodněte, zda je každý souvislý graf se sudými stupni a s neprázdnou množinou hran*

(a) *vrcholově 2-souvislý,*

(b) *hranově 2-souvislý.*

Příklad 5. *Pro $k \in \mathbb{N}$ označme jako \mathbb{B}^k množinu binárních řetězků délky k . Uvažme graf $Q_k = (V, E)$, nazývaný k -krychle, ve kterém $V = \mathbb{B}^k$ a $\{u, v\} \in E$ právě tehdy, když se řetězky u a v liší na právě jedné pozici. Ukažte, že $k_v(Q_k) = k$.*

Příklad 6. *Dokážete vymyslet variantu Ušatého lemma pro hranovou 2-souvislost?*

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>