Kombinatorika a grafy 1 — 7. cvičení*

15. listopadu 2024

1 Aplikace Hallovy věty

Vrcholovým pokrytím v grafu $G = (V, E)$ je množina $C \subseteq V$ taková, že pro každé $e \in E$ platí $e \cap C \neq \emptyset$. *Párováním* v G je množina disjunktních hran z E.

Kőnigova–Egerváryho věta. *V každém bipartitním grafu se velikost minimálního vrcholového pokrytí rovná velikosti maximálního párování.*

Nechť X a I jsou konečné množiny. *Množinovým systémem na X* nazveme $|I|$-tici $\mathcal{M} = (M_i : i \in I)$, kde $M_i \subseteq X$. *Systém různých reprezentantů* (SRR) je prostá funkce $f : I \to X$ taková, že pro každé $i \in I$ je $f(i) \in M_i$. Víme, že existence SRR v $\mathcal{M}$ je ekvivalentní s existencí párování velikosti $|I|$ v *incidenčním grafu* $G_{\mathcal{M}} = (I \cup X, \{\{i, x\} : i \in I, x \in X, x \in M_i\})$.

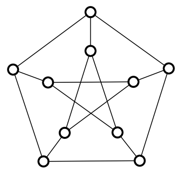
Hallova věta. *Systém různých reprezentantů v $\mathcal{M}$ existuje právě tehdy, když pro každou $J \subseteq I$ je $\left|\bigcup_{j \in J} M_j\right| \geq |J|$; tato podmínka se nazývá Hallova.*

Příklad 1. *Nechť a, b, c, d, e jsou různá přirozená čísla.*

(a) Má množinový systém tvořený všemi tříprvkovými podmnožinami množiny $\{a, b, c, d\}$ systém různých reprezentantů? Tedy nás zajímá systém $\mathcal{M} = (M_i \subseteq X : i \in I)$ pro $X = \{a, b, c, d\}$ a $I = \{1, 2, 3, 4\}$.

(b) Má množinový systém tvořený všemi tříprvkovými podmnožinami množiny $\{a, b, c, d, e\}$ systém různých reprezentantů?

Příklad 2. Perfektní párování grafu G *je takové párování, které pokrývá všechny vrcholy grafu G. Najděte všechna perfektní párování v Petersonově grafu. Ukažte, že víc jich neexistuje.*



Příklad 3. *Odvoďte Hallovu větu z Kőnigovy–Egerváryho věty.*

Příklad 4 (*). *Dokažte, že Hallova věta implikuje Kőnigovu–Egerváryho větu.*

Příklad 5. Latinský obdélník řádu $k \times n$, $k \leq n$ *je matice typu $\{1, \ldots, n\}^{k \times n}$, kde se v každém řádku a sloupci každý prvek vyskytuje nejvýše jednou.* Latinský čtverec řádu n *je latinský obdélník řádu $n \times n$.*

(a) Ukažte, že každý Latisnký obdélník řádu $k \times n$ lze doplnit na Latinský čtverec řádu n. (Můžete bez důkazu použít fakt, že k-regulární bipartitní grafy mají perfektní párování.)

(b) Ukažte, že latinských čtverců řádu n je alespoň $\Omega((n!)^2)$.

Příklad 6. *Najděte nekonečný systém množin $\mathcal{M} = (M_i : i \in I)$, který splňuje Hallovu podmínku (tj. pro každé $k \in \mathbb{N}$ obsahuje sjednocení libovolné k-tice množin z $\mathcal{M}$ aspoň k prvků), ale nemá systém různých reprezentantů.*

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/