

Kombinatorika a grafy 1 — 6. cvičení*

8. listopadu 2024

1 Toky v sítích

Síť je uspořádaná čtveřice (G, z, s, c) , kde $G = (V, E)$ je orientovaný graf, neboli $E \subseteq V \times V$, z a s jsou dva různé vrcholy grafu G (zvané zdroj a stok) a kapacita $c: E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ je funkce ohodnocující hrany. Tok v síti je každá funkce $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ splňující $0 \leq f(e) \leq c(e)$ pro každou hranu $e \in E$ a

$$\sum_{v:(u,v) \in E} f(u,v) = \sum_{v:(v,u) \in E} f(v,u)$$

pro každý vrchol $u \in V$ mimo stok a zdroj. Velikost toku je

$$w(f) = \sum_{v:(z,v) \in E} f(z,v) - \sum_{v:(v,z) \in E} f(v,z).$$

Řezem nazveme podmnožinu E , po jejímž odstranění neexistuje orientovaná cesta ze zdroje do stoku. Kapacita řezu R je $c(R) = \sum_{e \in R} c(e)$.

Jako rezervu hrany e na nějaké cestě P ze z do s označíme $r(e) = c(e) - f(e)$ pro hranu e orientovanou po směru P a $r(e) = f(e)$ pro hranu orientovanou proti směru P . Cesta P je pak zlepšující, pokud všechny její hrany mají kladnou rezervu.

Algoritmus 1.1: FORD–FULKERSON(G)

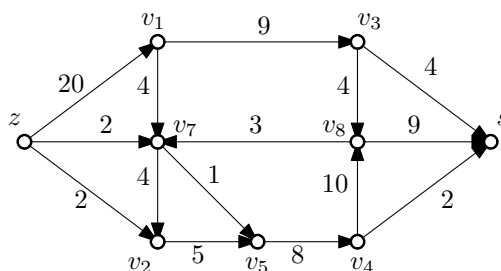
$f \leftarrow$ nulový tok

while existuje zlepšující cesta P ze z do s

do $\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_P \leftarrow \min_{e \in E(P)} r(e) \\ \text{Zvětšíme tok } f \text{ podél } P \text{ o } \epsilon_P \text{ (každé hraně } e \text{ po směru zvětšíme} \\ f(e) \text{ a hranám proti směru zmenšíme } f(e)). \end{array} \right.$

Vrať tok f .

Příklad 1. Najděte Fordovým–Fulkersonovým algoritmem tok maximální velikosti v následující síti. Nalezněte také řez minimální kapacity a ověřte tak, že daný tok má skutečně maximální velikost.



Příklad 2. (a) Najděte síť (a posloupnost použitých zlepšujících cest), na které F.-F. algoritmus nedospěje ke správnému výsledku, pokud mu povolíme používat jen orientované zlepšující cesty.

(b) Najděte posloupnost sítí (a posloupnosti použitých zlepšujících cest), na které má F.-F. algoritmus exponenciální časovou složitost (vzhledem k počtu bitů potřebných k uložení grafu a kapacit).

Příklad 3. Při hledání maximálního toku jsou kapacitami omezené hrany. Někdy se ale může stát, že budeme potřebovat nějaké kapacity přiřadit i vrcholům “vrcholem v nesmí protéct víc než x litrů tekutiny za jednotku času”. Jak najít maximální tok splňující i tuto podmínku?

Příklad 4. Ukažte, že problém hledání maximálního toku v síti, která má více zdrojů a více stoků, lze redukovat na případ s jedním zdrojem a jedním stokem.

Příklad 5. Dokažte, že počet toků maximální velikosti je v každé síti buď jedna nebo je nekonečný.

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>